

Gravitation und Quantenmechanik

Domenico Giulini

ZARM Bremen
Leibniz Universität Hannover
Riemann Zentrum für Geometrie und Physik

DPG-Frühjahrstagung 2016 in Hamburg
Lehrer/Innen Tag am 1. März

GR & QM

Domenico Giulini

The Big Picture

- Fundamentalkonstanten
- Planck Skalen

Äquivalenzprinzip

- Galilei
- Newton
- Hertz
- heute

QM & ÄP

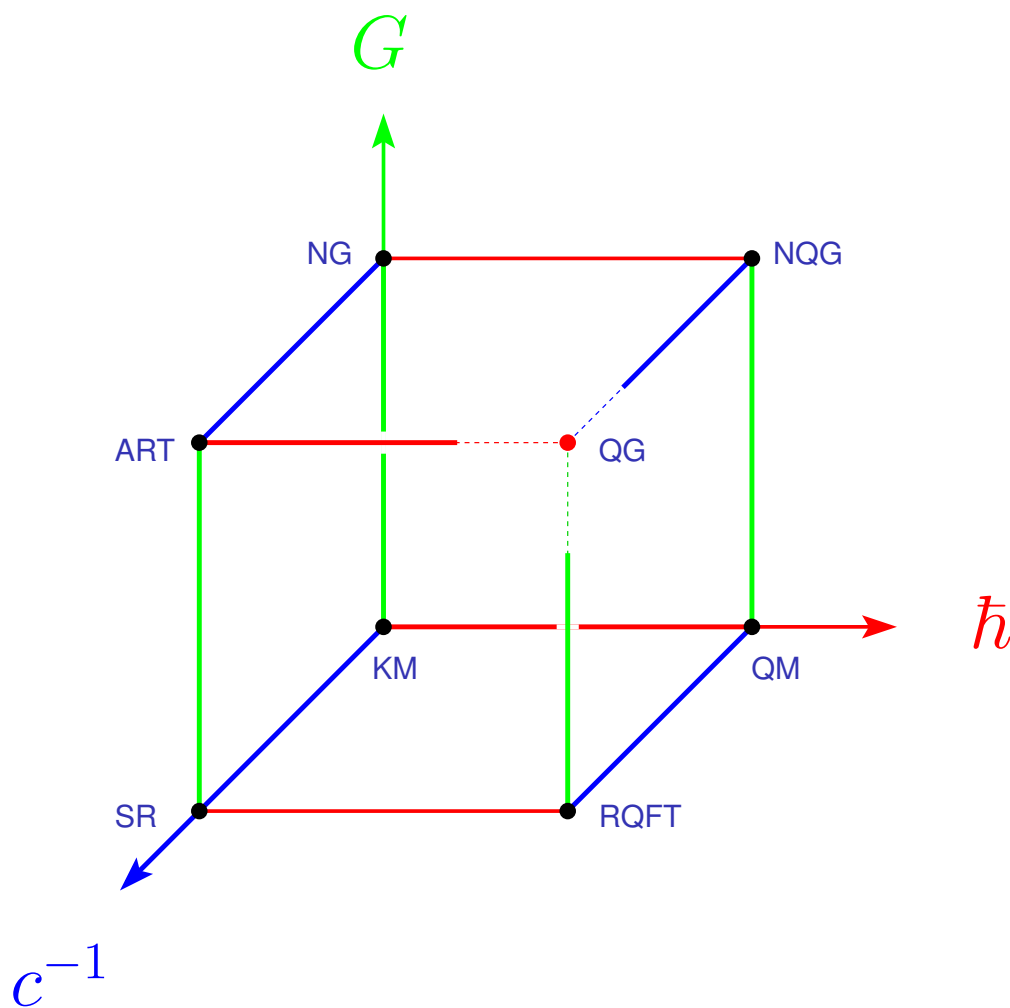
- braucht
- widerspricht
- widerspricht nicht!
- nutzt

Eigengravitation

- Einstein semi-klassisch
- Schrödinger/Newton
- gebundene Zustände
- zeitabhängige Zustände

Schluss

The Big Picture: Fundamentalkonstanten



GR & QM

Domenico Giulini

The Big Picture

- Fundamentalkonstanten
- Planck Skalen

Äquivalenzprinzip

- Galilei
- Newton
- Hertz
- heute

QM & ÄP

- braucht
- widerspricht
- widerspricht nicht!
- nutzt

Eigengravitation

- Einstein semi-klassisch
- Schrödinger/Newton
- gebundene Zustände
- zeitabhängige Zustände

Schluss

Die Planck-Skalen

- Naive Abschätzungen der physikalischen Dimensionen, bei denen QT und ART gleichermaßen wichtig werden, liefern die *Planck-Skalen*

$$L_P = \sqrt{\frac{\hbar \cdot G}{c^3}} = 1,61 \times 10^{-35} \text{ Meter}$$

$$T_P = \sqrt{\frac{\hbar \cdot G}{c^5}} = 5,39 \times 10^{-44} \text{ Sekunden}$$

$$M_P = \sqrt{\frac{\hbar \cdot c}{G}} = 2,18 \times 10^{-5} \text{ Gramm} = 1,3 \times 10^{19} \text{ amu}$$

- Z.B. hätten Schwarze Löcher unterhalb der Planck-Masse eine Compton-Wellenlänge oberhalb ihres (klassisch definierten) Horizontradius.
- Die aberwitzige Kleinheit von L_P und T_P stellt jeden Versuch, eine Phänomenologie der Quantengravitation zu formulieren, auf eine harte Probe!
- Wichtigste Aufgabe ist es, an überschaubaren Systemen theoretisch weiterführende Fragestellungen herauszuarbeiten.

GR & QM

Domenico Giulini

The Big Picture

- Fundamentalkonstanten
- Planck Skalen

Äquivalenzprinzip

- Galilei
- Newton
- Hertz
- heute

QM & ÄP

- braucht
- widerspricht
- widerspricht nicht!
- nutzt

Eigengravitation

- Einstein semi-klassisch
- Schrödinger/Newton
- gebundene Zustände
- zeitabhängige Zustände

Schluss

Äquivalenzprinzip: Galileis *Dialog* von 1638



Galileo Galilei (1564-1642)

„[...] endlich habe ich zwei Kugeln genommen, eine aus Blei und eine aus Kork, jene gegen 100 mal schwerer als diese, und habe beide an zwei gleiche feine Fäden von 4 bis 5 Ellen Länge befestigt und aufgehängt; [...]

Man bemerkt wohl einen Einfluss des Mediums, welches einen Widerstand darbietet der Bewegung und weit merklicher die Schwingungen der Kork-Kugel vermindert, als die des Bleies, aber dadurch werden sie nicht mehr oder minder häufig, selbst wenn die vom Kork zurückgelegten Bögen nur 5 oder 6 Grad betragen, und die des Bleies 50 oder 60 Grad, sie werden sämtlich in ein und derselben Zeit zurückgelegt. [...] dass weder in 100 noch in 1000 Schwingungen die kleinste Verschiedenheit zu merken war [...]

GR & QM

Domenico Giulini

The Big Picture

- Fundamentalkonstanten
- Planck Skalen

Äquivalenzprinzip

- Galilei
- Newton
- Hertz
- heute

QM & ÄP

- braucht
- widerspricht
- widerspricht nicht!
- nutzt

Eigengravitation

- Einstein semi-klassisch
- Schrödinger/Newton
- gebundene Zustände
- zeitabhängige Zustände

Schluss

Hoppla!

- Schwingungsdauer des mathematischen Pendels (elliptisches Integral)

$$T(\alpha) = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left\{ 1 + \frac{1}{4} \sin^2(\alpha/2) + \frac{9}{64} \sin^4(\alpha/2) + \dots \right\}$$

- Akkumulierte Periodendifferenz der Amplituden 25° und $2,5^\circ$ nach N Schwingungen

$$N \cdot \frac{T(25^\circ) - T(2,5^\circ)}{T} \approx \frac{N}{4} \sin^2(12,5^\circ) \approx \frac{N}{85}$$

- Was geht hier vor?

GR & QM

Domenico Giulini

The Big Picture

- Fundamentalkonstanten
- Planck Skalen

Äquivalenzprinzip

- Galilei
- Newton
- Hertz
- heute

QM & ÄP

- braucht
- widerspricht
- widerspricht nicht!
- nutzt

Eigengravitation

- Einstein semi-klassisch
- Schrödinger/Newton
- gebundene Zustände
- zeitabhängige Zustände

Schluss

Galileis *Dialog* von 1638

- ▶ „Ohne viel Versuche können wir durch eine kurze, bindende Schlussfolgerung nachweisen, wie unmöglich es sei, dass ein größeres Gewicht sich schneller bewege, als ein kleineres, wenn beide aus gleichem Stoff bestehen; und überhaupt alle jene Körper, von denen Aristoteles spricht. Wenn wir zwei Körper haben, deren natürliche Geschwindigkeit verschieden sei, so ist es klar, dass wenn wir den langsameren mit dem geschwindigeren vereinigen, dieser letztere von jenem verzögert werden müsste, und jener, der langsamere, müsste von Schnelleren beschleunigt werden.“

GR & QM

Domenico Giulini

The Big Picture

- Fundamentalkonstanten
- Planck Skalen

Äquivalenzprinzip

- Galilei
- Newton
- Hertz
- heute

QM & ÄP

- braucht
- widerspricht
- widerspricht nicht!
- nutzt

Eigengravitation

- Einstein semi-klassisch
- Schrödinger/Newton
- gebundene Zustände
- zeitabhängige Zustände

Schluss

Die drei Massenbegriffe der Newton'schen Physik

1. **Die träge Masse** bestimmt die Kraft, mit der ein Körper einer aufgezwungenen Änderung (Beschleunigung) seines Bewegungszustands (Geschwindigkeit) entgegenwirkt:

$$\vec{F}_{\text{träge}} = -m_t \cdot \vec{a}$$

2. **Die passive schwere Masse** bestimmt die Kraft, mit der ein äußeres Gravitationsfeld $\vec{g}$ auf einen Körper wirkt:

$$\vec{F}_{\text{gravitation}} = m_{ps} \cdot \vec{g}$$

3. **Die aktive schwere Masse** bestimmt die Stärke des vom Körper selbst erzeugten Gravitationsfeldes.

$$\vec{g} = -m_{as} \cdot G \cdot \frac{\vec{n}}{r^2}$$

GR & QM

Domenico Giulini

The Big Picture

- Fundamentalkonstanten
- Planck Skalen

Äquivalenzprinzip

- Galilei
- Newton

- Hertz
- heute

QM & ÄP

- braucht
- widerspricht
- widerspricht nicht!
- nutzt

Eigengravitation

- Einstein semi-klassisch
- Schrödinger/Newton
- gebundene Zustände
- zeitabhängige Zustände

Schluss

actio=reactio



$$\vec{F}_{12} = m_{ps}^{(1)} \vec{g}_2(\vec{x}_1) = (m_{ps}^{(1)} m_{as}^{(2)}) G \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{\|\vec{x}_2 - \vec{x}_1\|^3}$$

$$\vec{F}_{21} = m_{ps}^{(2)} \vec{g}_1(\vec{x}_2) = (m_{ps}^{(2)} m_{as}^{(1)}) G \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{\|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|^3}$$

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \Leftrightarrow \frac{m_{ps}^{(1)}}{m_{as}^{(1)}} = \frac{m_{ps}^{(2)}}{m_{as}^{(2)}} = \text{universelle Konstante} = 1$$

- Unerklärt bleibt die Gleichheit der trägen und schweren Masse; warum sollte

$$\frac{m_t}{m_s} = \text{universelle Konstante} ?$$

- Heinrich Hertz war einer der ersten, der die Notwendigkeit einer fundamentalen Erklärung aussprach (1884).

GR & QM

Domenico Giulini

The Big Picture

- Fundamentalkonstanten
- Planck Skalen

Äquivalenzprinzip

- Galilei
- Newton

- Hertz
- heute

QM & ÄP

- braucht
- widerspricht
- widerspricht nicht!
- nutzt

Eigengravitation

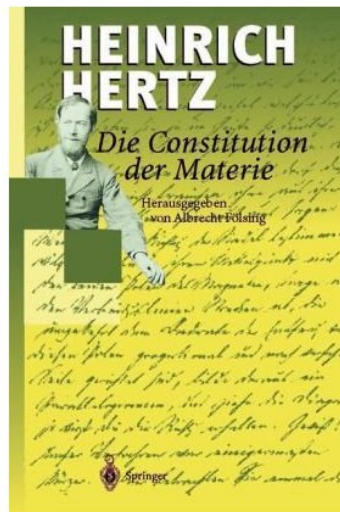
- Einstein semi-klassisch
- Schrödinger/Newton
- gebundene Zustände
- zeitabhängige Zustände

Schluss

Hertz' *Die Constitution der Materie* von 1884



Heinrich Hertz (1857-94)



Springer Verlag (1999)

GR & QM

Domenico Giulini

The Big Picture

- Fundamentalkonstanten
- Planck Skalen

Äquivalenzprinzip

- Galilei
- Newton
- Hertz
- heute

QM & ÄP

- braucht
- widerspricht
- widerspricht nicht!
- nutzt

Eigengravitation

- Einstein semi-klassisch
- Schrödinger/Newton
- gebundene Zustände
- zeitabhängige Zustände

Schluss

Hertz' *Die Constitution der Materie* von 1884

- „Sehr wunderbar ist der Zusammenhang, welcher zwischen der Gravitation der Materie und ihrer Trägheit besteht. Wir sehen nämlich, daß irgend zwei Mengen von Materie, welche gleiche Trägheit besitzen, auch gleiche Gravitationswirkung ausüben, einerlei, welches der Stoff ist, aus dem sie bestehen. [...]

Diese Übereinstimmung ist also vielmehr als ein wunderbares Räthsel zu bezeichnen, sie bedarf einer Erklärung; wir dürfen vermuten, daß auch eine einfache und verständliche Erklärung möglich ist, und dass uns diese Erklärung einen weitgehenden Einblick in die Constitution der Materie gestatten wird.“

GR & QM

Domenico Giulini

The Big Picture

- Fundamentalkonstanten
- Planck Skalen

Äquivalenzprinzip

- Galilei
- Newton

- Hertz

- heute

QM & ÄP

- braucht
- widerspricht
- widerspricht nicht!
- nutzt

Eigengravitation

- Einstein semi-klassisch
- Schrödinger/Newton
- gebundene Zustände
- zeitabhängige Zustände

Schluss

Heutige Formulierung des Äquivalenzprinzips

- **Universalität des Freien Falls (UFF):** Gleichheit von träger und schwerer Masse. Bahnen von „Testkörpern“ hängen nicht von deren physikalischer und chemischer Beschaffenheit ab. Mögliche Verletzungen werden durch den *Eötvös*-Faktor parametrisiert:

$$\eta(A, B) := 2 \frac{|a(A) - a(B)|}{|a(A) + a(B)|}$$

- **Lokale Lorentz Invarianz (LLI):** Lokal existiert weder eine bevorzugte Raumrichtung noch ein bevorzugter Bewegungszustand. Mögliche Verletzungen werden z.B. durch $\Delta c/c$ parametrisiert.
- **Universalität des Uhrenganges bzw. der gravitativen Rotverschiebung (UCR, UGR, LPI)** Der Einfluss der Gravitation auf „Standarduhren“ ist universell und hängt nicht von deren physikalischer und chemischer Beschaffenheit ab. Mögliche Verletzungen werden durch den α -Faktor parametrisiert.

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = (1 + \alpha) \frac{\Delta U}{c^2}$$

GR & QM

Domenico Giulini

The Big Picture

- Fundamentalkonstanten
- Planck Skalen

Äquivalenzprinzip

- Galilei
- Newton
- Hertz
- heute

QM & ÄP

- braucht
- widerspricht
- widerspricht nicht!
- nutzt

Eigengravitation

- Einstein semi-klassisch
- Schrödinger/Newton
- gebundene Zustände
- zeitabhängige Zustände

Schluss

Güte der Bestätigungen des Äquivalenzprinzips

- **UFF:** Typische Ergebnisse von Versuchen mit Torsionswaagen an der Washington State-University (Adelberger *et al.*) zwischen 1994 und heute sind

$$\eta(Al, Pt) = (-0.3 \pm 0.9) \times 10^{-12}, \quad \eta(Be, Ti) = (0.3 \pm 1.8) \times 10^{-13}$$

Geplanten Verbesserungen sind $5 \cdot 10^{-16}$ (MICROSCOPE) und 10^{-18} (STEP).

- **LLI:** Das zur Zeit beste Experiment vom Michelson-Morley-Typ liefert (S. Herrmann *et al.* 2009)

$$\frac{\Delta c}{c} < 10^{-17}$$

- **UGR:** Absolute Rotverschiebungsmessungen mit H-Maser-Uhren (1976, $h = 10\,000\text{ Km}$) und relative Messungen durch Vergleich Verschiedener Uhren (z.B. Cs-Fountain und H-Maser) ergeben

$$\alpha_{\text{abs}} < 2 \times 10^{-4}, \quad \alpha_{\text{rel}} < 4 \times 10^{-6}$$

- Auf Erdoberfläche $\Delta T/T = g/c^2 \approx 10^{-16} \text{ m}^{-1}$.
Im Sept. 2010 gelang es Chou *et al.* mit einer Al^{+} -basierten optischen Atomuhr die gravitative Rotverschiebung im Labor über eine Distanz von $h = 33\text{ cm}$ nachzuweisen.

GR & QM

Domenico Giulini

The Big Picture

- Fundamentalkonstanten
- Planck Skalen

Äquivalenzprinzip

- Galilei
- Newton
- Hertz
- heute

QM & ÄP

- braucht
- widerspricht
- widerspricht nicht!
- nutzt

Eigengravitation

- Einstein semi-klassisch
- Schrödinger/Newton
- gebundene Zustände
- zeitabhängige Zustände

Schluss

Aktivitäten am ZARM



- ▶ **MICROSCOPE** (Micro Satellite à trainée compensée pour l'Observation du Principe d'Equivalence) Start für 2016 geplant. Missionsdauer > 18 Monate. Ziel ist die Universalität des freien Falls auf 10^{-15} Niveau (oder besser) zu testen.
- ▶ **QUANTUS** (Quantengase unter Schwerelosigkeit) Start 2004; 2007 erstes BEC (Rubidium 87) unter Schwerelosigkeit (Mikrogravitation). Ziel ist die Demonstration der Durchführbarkeit quantenoptischer Experimente unter Schwerelosigkeit für spätere Raummissionen.
- ▶ **PRIMUS** (Präzisionsinterferometrie mit Materiewellen unter Schwerelosigkeit). Benutzt BEC als Quelle für Materiewellen. Pionier-Experiment für Atominterferometrie in Schwerelosigkeit (lange Integrationszeiten).

GR & QM

Domenico Giulini

The Big Picture

- Fundamentalkonstanten
- Planck Skalen

Äquivalenzprinzip

- Galilei
- Newton
- Hertz
- heute

QM & ÄP

- braucht
- widerspricht
- widerspricht nicht!
- nutzt

Eigengravitation

- Einstein semi-klassisch
- Schrödinger/Newton
- gebundene Zustände
- zeitabhängige Zustände

Schluss

Verletzungsmechanismen

- Angenommen neben dem Gravitationspotential

$$V_{AE} = -G \frac{M_A M_E}{r_{AE}}$$

existierte ein weiteres, langreichweitiges Potential

$$W_{AE} = -H \frac{Q_A Q_E}{r_{AE}}$$

das an Ladungen $Q \propto M$ koppelt.

- Effektives potential

$$G_{AE} = G(1 + h q_A q_E) .$$

mit $h = H/G$ und spezifischer Ladung $q_A = Q_A/M_A$.

- Ist Letztere nicht universell so resultieren Verletzungen der UFF:

$$\eta(A, B) \approx h q_E (q_A - q_B) ,$$

- Langreichweitige Skalarfelder treten typischerweise in vereinheitlichten Theorien auf. η -Faktoren ab $\approx 10^{-15}$ sind mit der Phänomenologie der Stringtheorie vereinbar (Damour & Polyakov 1994).

GR & QM

Domenico Giulini

The Big Picture

- Fundamentalkonstanten
- Planck Skalen

Äquivalenzprinzip

- Galilei
- Newton
- Hertz
- heute

QM & ÄP

- braucht
- widerspricht
- widerspricht nicht!
- nutzt

Eigengravitation

- Einstein semi-klassisch
- Schrödinger/Newton
- gebundene Zustände
- zeitabhängige Zustände

Schluss

QM & ÄP: QM braucht UGR (Bohr/Einstein)

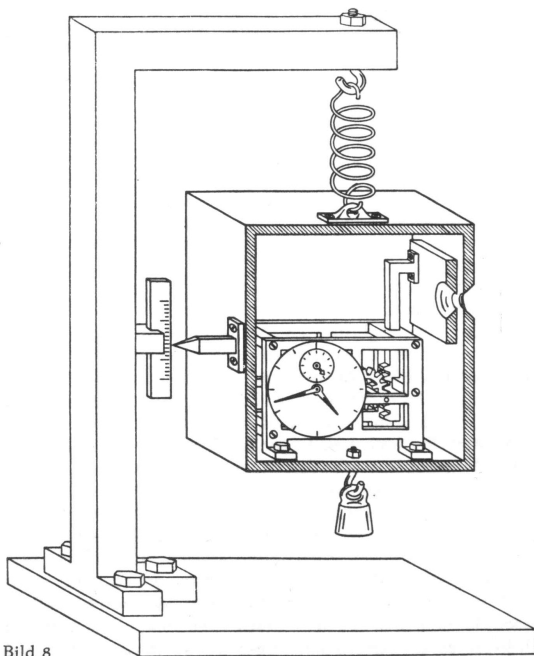


Bild 8

- Einstein argumentiert für Verletzbarkeit von $\Delta E \Delta T > \hbar$.
- Bohr argumentiert, dass gerade UGR dies verhindere:

$$\text{QM: } \Delta q > \frac{\hbar}{\Delta p} > \frac{\hbar}{T g \Delta m}$$

$$\text{UGR: } \Delta T = \frac{g T}{c^2} \Delta q$$

$$\Rightarrow \Delta T > \frac{\hbar}{\Delta m c^2} = \frac{\hbar}{\Delta E}$$

GR & QM

Domenico Giulini

The Big Picture

- Fundamentalkonstanten
- Planck Skalen

Äquivalenzprinzip

- Galilei
- Newton
- Hertz
- heute

QM & ÄP

- braucht
- widerspricht
- widerspricht nicht!
- nutzt

Eigengravitation

- Einstein semi-klassisch
- Schrödinger/Newton
- gebundene Zustände
- zeitabhängige Zustände

Schluss

QFT braucht UGR: Gravitation als Regulator - I

- Betrachte massive geladene Kugelschale vom Radius R , nackter Ruhemasse M_0 , schwerer Masse M_g und elektrischer Ladung Q . Die Summe ihrer Energien ist

$$E = M_0 c^2 + \frac{Q^2}{2R} - G \frac{M_g^2}{2R}$$

- Benutze die folgenden Prinzipien:

$$E = M_i c^2$$

$$M_g = M_i$$

- Erhalte quadratische Gleichung für Gesamtmasse $M := M_i = M_g$:

$$\Rightarrow M := \frac{E}{c^2} = M_0 + \frac{Q^2}{2c^2 R} - G \frac{M^2}{2c^2 R}$$

GR & QM

Domenico Giulini

The Big Picture

- Fundamentalkonstanten
- Planck Skalen

Äquivalenzprinzip

- Galilei
- Newton
- Hertz
- heute

QM & ÄP

- braucht
- widerspricht
- widerspricht nicht!
- nutzt

Eigengravitation

- Einstein semi-klassisch
- Schrödinger/Newton
- gebundene Zustände
- zeitabhängige Zustände

Schluss

QFT braucht UGR: Gravitation als Regulator - II

- Die Lösung ist

$$M(R) = \frac{Rc^2}{G} \left\{ -1 + \sqrt{1 + \frac{2G}{Rc^2} \left(M_0 + \frac{Q^2}{2c^2 R} \right)} \right\}$$

- Deren Limes für $R \rightarrow 0$ existiert:

$$\lim_{R \rightarrow 0} M(R) = \sqrt{\frac{2Q^2}{G}} = \sqrt{2\alpha} \cdot \frac{|Q|}{e} \cdot M_P$$

Hingegen ist ihre Störungsreihe in der gravitativen Kopplungskonstanten G nicht uniform in R bei $R = 0$:

$$M = \left(m_0 + \frac{Q^2}{2c^2 R} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(n+1)!} \cdot \left(-\frac{G}{Rc^2} \right)^n \cdot \left(m_0 + \frac{Q^2}{2c^2 R} \right)^{n+1}$$

GR & QM

Domenico Giulini

The Big Picture

- Fundamentalkonstanten
- Planck Skalen

Äquivalenzprinzip

- Galilei
- Newton
- Hertz
- heute

QM & ÄP

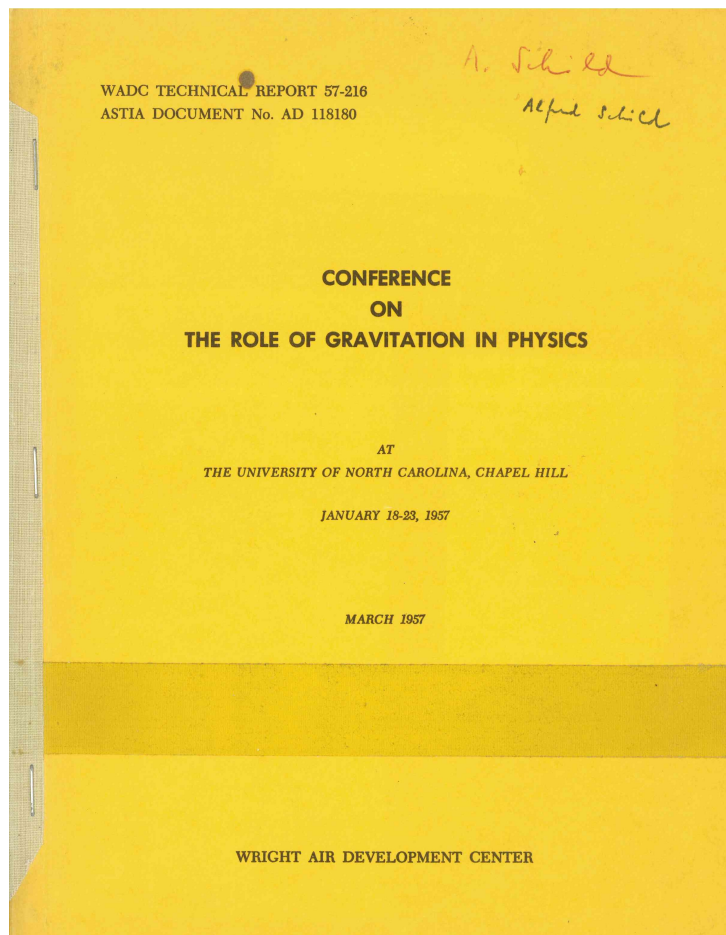
- braucht
- widerspricht
- widerspricht nicht!
- nutzt

Eigengravitation

- Einstein semi-klassisch
- Schrödinger/Newton
- gebundene Zustände
- zeitabhängige Zustände

Schluss

QM widerspricht ÄP



GR & QM

Domenico Giulini

The Big Picture

- Fundamentalkonstanten
- Planck Skalen

Äquivalenzprinzip

- Galilei
- Newton
- Hertz
- heute

QM & ÄP

- braucht
- widerspricht
- widerspricht nicht!
- nutzt

Eigengravitation

- Einstein semi-klassisch
- Schrödinger/Newton
- gebundene Zustände
- zeitabhängige Zustände

Schluss

QM widerspricht ÄP - Feynman & Co.

DE WITT called attention to the fact that there is an ambiguity in the choice of field variables in terms of which one may make an expansion about the Minkowski metric $\eta_{\mu\nu}$. For example, one might use either $\psi_{\mu\nu}$ or $q_{\mu\nu}$ where $q_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \psi_{\mu\nu}$, $G^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + q^{\mu\nu}$. To be consistent in a self-energy calculation one should expand out to the second order, and the difference in choice leads to a difference in the graviton-vacuum expectation value of the interaction term which is proportional to the trace of the non-gravitational (or matter) stress tensor. There are some fields, notably the electromagnetic field, for which this trace vanishes. In this case, you get the same result in the second order, no matter what you expand in terms of. It is a curious thing in the electromagnetic case (although, as Utiyama has pointed out, you do have the derivative coupling and therefore the divergence is of the second or third order), that if you include second order terms in the interaction, the old-fashioned self-energy will be exactly compensated. In fact, one gets no photon self-interaction up to the second order. MISNER asked if the computation has also been done for the neutrino field. DE WITT replied that although it should be done, it has not been done for two reasons: (1) The mathematics of the spinor problem up to the second order is considerably more complicated and has not yet been fully worked out. (2) Interest has in the meantime shifted to the problem of tackling the complete nonlinear gravitational field.

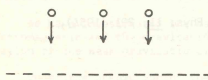
WHEELER pointed out that the linear starting point is incompatible with any topology other than a Euclidean one; that if one has curved space or "worm holes," you just can't start expanding this way. BELINFANTE asked if anyone had found it possible to have hole theory in a curved space; i.e., can one make a covariant distinction between positive and negative energy states?

ROSENFELD said that Dirac, just after he had formulated hole theory and was faced with the objection that there is an infinite energy associated with these states, had attempted unsuccessfully to overcome this difficulty by introducing a closed universe.

MISNER said that one could get a quite good qualitative idea of what happens in curved space (the metric being externally impressed) by using the Feynman prescription. Since the action is still quadratic in the interesting field variables, there is no difficulty. In a spherical space there exist states of excitation which do not scatter each other; but as soon as the space has "bumps" in it, photons in one state get scattered into other states. Hole theory is possible if the metric is static; however, a time dependent metric causes electrons to go to positive energy states.

BERGMANN pointed out that, on this account, one does not have to exclude hole theory, because if the electrons get excited, there is occasional pair production.

SALECKER introduced a thought experiment, involving a stream of particles falling on a diffraction grating. On account of the de Broglie relation for the waves associated with the stream, $\lambda = \frac{h}{mv}$, one expects that particles of different mass will scatter differently if they fall from a given height. According to general relativity, one expects the same behavior for different masses with the same initial state of



WADG TR 57-216 134

motion. Therefore, we arrive at a contradiction with the principle of equivalence. FEYNMAN asked if the grating is here allowed to exert forces on the particles which are non-gravitational. DE WITT said that one needs rather a grating (made, for example, out of planets) which acts only through its gravitational field on the stream. FEYNMAN then said that he did not believe that the principle of equivalence denies the possibility of distinguishing between two different masses. Of course, the principle of equivalence would prevent one from distinguishing between masses by means of this particular experiment if only classical laws were operative. However, the introduction of Planck's constant into the scheme of things introduces new possibilities, which are not necessarily in contradiction with the principle of equivalence. As far as this particular experiment is concerned, all that the principle of equivalence would say would be that if one performs the experiment in an elevator, he will obtain the same result as in a corresponding gravitational field. FEYNMAN also emphasized that the quantities G and c by themselves do not lead to a unit of mass, whereas such a unit exists if $\hbar$ is included.

WHEELER pointed out that the principle of equivalence only denies the possibility of distinguishing between the gravitational and inertial masses of a single body, but definitely does not prevent one from distinguishing the masses of two different bodies, even when only gravitational forces are involved. For example, we know the relative sizes of the masses of the sun and the various planets solely from observation of their gravitational interactions. BERGMANN added that the principle of equivalence makes a statement about local conditions only. Therefore you can do one of two things: either (1) use a small diffraction grating that is not gravitational, or (2) use a diffraction grating made of planets. In this case, the conditions are certainly not local.

FEYNMAN characterized the point which Salecker had raised as an interesting point and a true point, but not necessarily a paradoxical one. If the falling particles are not allowed to react back on the grating, then according to the classical theory they will all follow the same paths. Whereas, in the quantum theory they will give rise to different diffraction patterns depending on their masses.

SALECKER then raised again the question why the gravitational field needs to be quantized at all. In his opinion, charged quantized particles already serve as sources for a Coulomb field which is not quantized. [Editor's Note: Salecker did not make completely clear what he meant by this. If he meant that some forces could be represented by actions-at-a-distance, then, although he was misunderstood, he was right. For the corresponding field can then be eliminated from the theory and hence remain unquantized. He may have meant to imply that one should try to build up a completely action-at-a-distance theory of gravitation, modified by the relativistic necessities of using both advanced and retarded interactions and imbedded in an "absorber theory of radiation" to preserve causality. In this case, gravitation *per se* could remain unquantized. However, these questions were not discussed until later in the session.]

BELINFANTE insisted that the Coulomb field is quantized through the ψ -field. He then repeated DeWitt's argument that it is not logical to allow an "expectation value" to serve as the source of the gravitational field. There are two quantities which are involved in the description of any quantized physical system. One of them gives information about the general dynamical behavior of the system, and is represented by a certain operator (or operators). The other gives information about our

WADG TR 57-216 135

GR & QM

Domenico Giulini

The Big Picture

- Fundamentalkonstanten
- Planck Skalen

Äquivalenzprinzip

- Galilei
- Newton
- Hertz
- heute

QM & ÄP

- braucht
- widerspricht
- widerspricht nicht!
- nutzt

Eigengravitation

- Einstein semi-klassisch
- Schrödinger/Newton
- gebundene Zustände
- zeitabhängige Zustände

Schluss

QM widerspricht ÄP: Das gravitative “H-atom”

- Zentrifugalkraft gleicht gravitative Anziehung aus

$$m_t \omega^2 r = G \frac{m_s M_s}{r^2} .$$

- Quantisierung des Drehimpulses

$$m_t \omega r^2 = n \hbar$$

- Radien, Frequenzen

$$r(n) = \left(\frac{1}{m_i m_g} \right) \cdot \frac{n^2 \hbar^2}{G M_g}, \quad \omega(n) = (m_t m_s^2) \cdot \frac{G^2 M_s^2}{n^3 \hbar^3},$$

and Energien

$$E(n) = \frac{1}{2} m_t \omega^2(n) r^2(n) - \frac{G m_s M_s}{r(n)} = - (m_t m_s^2) \cdot \frac{G^2 M_s^2}{2 n^2 \hbar^2} .$$

GR & QM

Domenico Giulini

The Big Picture

- Fundamentalkonstanten
- Planck Skalen

Äquivalenzprinzip

- Galilei
- Newton
- Hertz
- heute

QM & ÄP

- braucht
- widerspricht
- widerspricht nicht!
- nutzt

Eigengravitation

- Einstein semi-klassisch
- Schrödinger/Newton
- gebundene Zustände
- zeitabhängige Zustände

Schluss

QM widerspricht ÄP nicht: Eine Proposition

ψ Löst die Schrödinger Gleichung

$$i\hbar\partial_t\psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m_t}\Delta - \vec{F}(t) \cdot \vec{x}\right)\psi$$

genau dann wenn

$$\psi = (\exp(i\alpha)\psi') \circ \Phi^{-1}$$

und ψ' die freie Schrödinger-Gleichung löst.

Dabei ist $\Phi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ die folgende, raum-zeitliche Bewegung

$$\Phi(t, \vec{x}) = (t, \vec{x} + \vec{\xi}(t))$$

in der $\vec{\xi}$ eine Lösung der klassischen Gleichung

$$\ddot{\vec{\xi}}(t) = \vec{F}(t)/m_i$$

ist mit $\vec{\xi}(0) = \dot{\vec{\xi}}(0) = \vec{0}$ und $\alpha : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben ist durch

$$\alpha(t, \vec{x}) = \frac{m_i}{\hbar} \left\{ \dot{\vec{\xi}}(t) \cdot (\vec{x} + \vec{\xi}(t)) - \frac{1}{2} \int^t dt' \|\dot{\vec{\xi}}(t')\|^2 \right\}$$

GR & QM

Domenico Giulini

The Big Picture

- Fundamentalkonstanten
- Planck Skalen

Äquivalenzprinzip

- Galilei
- Newton
- Hertz
- heute

QM & ÄP

- braucht
- widerspricht
- widerspricht nicht!
- nutzt

Eigengravitation

- Einstein semi-klassisch
- Schrödinger/Newton
- gebundene Zustände
- zeitabhängige Zustände

Schluss

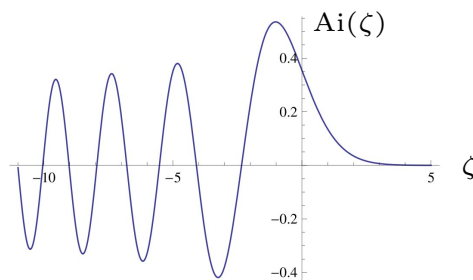
QM nutzt ÄP: Homogenes statisches Gravitationsfeld

- Die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung mit linearem Potential $V(z) = m_g g z$ ist äquivalent zu:

$$\left(\frac{d^2}{d\zeta^2} - \zeta \right) \psi = 0, \quad \zeta := \kappa z - \varepsilon$$

wobei

$$\kappa := \left[\frac{2m_t m_s g}{\hbar^2} \right]^{\frac{1}{3}}, \quad \varepsilon := E \cdot \left[\frac{2m_t}{m_s^2 g^2 \hbar^2} \right]^{\frac{1}{3}}.$$



- Mit reflektierender horizontaler Ebene bei $z = 0$ erhält man Eigenzustände aus der Randbedingung $\psi(z = 0) = 0$, also $\varepsilon = -z_n$.
- Realisierung mit Neutronen im Gravitationsfeld der Erde (Abele *et al.* 2002):

$$E(n) = -z_n \left[\frac{m_s^2}{m_t} \cdot \frac{g^2 \hbar^2}{2} \right]^{\frac{1}{3}} = -z_n \times 0.602 \text{ peV}$$

GR & QM

Domenico Giulini

The Big Picture

- Fundamentalkonstanten
- Planck Skalen

Äquivalenzprinzip

- Galilei
- Newton
- Hertz
- heute

QM & ÄP

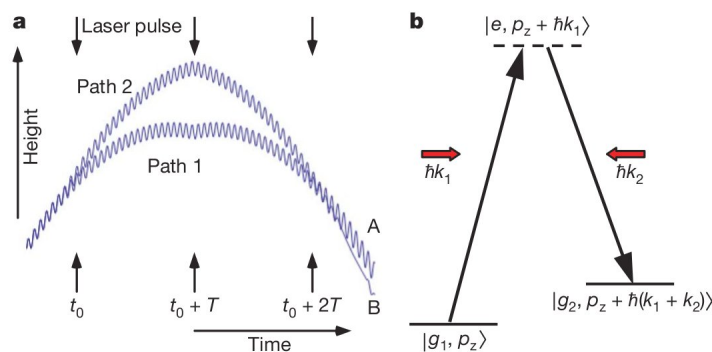
- braucht
- widerspricht
- widerspricht nicht!
- nutzt

Eigengravitation

- Einstein semi-klassisch
- Schrödinger/Newton
- gebundene Zustände
- zeitabhängige Zustände

Schluss

Über das Ziel hinaus?



- Phasenverschiebung der (Schwerpunkts-)Materiewelle

$$\Delta\phi = gT^2 \cdot \frac{\Delta p}{\hbar}$$

- Behauptung (Müller, Peters & Chu, Nature Feb. 2010): Dies kann als gravitative Rotverschiebung gedeutet werden:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= \Delta\omega T = \omega \frac{\Delta U}{c^2} T = \omega \frac{g\Delta h}{c^2} T = \omega \frac{g\Delta p}{mc^2} T^2 \\ &= \left(\frac{\omega}{mc^2/\hbar} \right) \cdot \left(gT^2 \cdot \frac{\Delta p}{\hbar} \right). \end{aligned}$$

⇒ De Broglie (zu) wörtlich genommen: “A rock is a clock”

GR & QM

Domenico Giulini

The Big Picture

- Fundamentalkonstanten
- Planck Skalen

Äquivalenzprinzip

- Galilei
- Newton
- Hertz
- heute

QM & ÄP

- braucht
- widerspricht
- widerspricht nicht!
- nutzt

Eigengravitation

- Einstein semi-klassisch
- Schrödinger/Newton
- gebundene Zustände
- zeitabhängige Zustände

Schluss

Eigengravitation: Einstein-Materie-Gleichung semiklassisch

- Betrachte Einstein-Gravitation gekoppelt an skalares Feld

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ab}^{KG}(\phi), \quad (\square_g + m^2)\phi = 0$$

- Mit Ansatz

$$\phi(\vec{x}, t) = \exp\left(\frac{ic^2}{\hbar} S(\vec{x}, t)\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{\hbar}}{c}\right)^n a_n(\vec{x}, t),$$

und $1/c$ -Entwicklung folgt (A. Großardt & D.G. 2012):

$$i\hbar\partial_t\psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + mU\right)\psi$$

wobei

$$\Delta U = 4\pi G(\rho + m|\psi|^2)$$

- Ohne Selbstkopplung ergibt das gerade die erwartete Kopplung des Schrödingerfeldes ψ an das äußere Newton'sche Potential U .

GR & QM

Domenico Giulini

The Big Picture

- Fundamentalkonstanten
- Planck Skalen

Äquivalenzprinzip

- Galilei
- Newton
- Hertz
- heute

QM & ÄP

- braucht
- widerspricht
- widerspricht nicht!
- nutzt

Eigengravitation

- Einstein semi-klassisch
- Schrödinger/Newton
- gebundene Zustände
- zeitabhängige Zustände

Schluss

Die Schrödinger-Newton-Gleichung (SNG)

- ▶ Ohne äußere Quellen erhält man die “**Schrödinger-Newton-Gleichung**” (Diosi 1984, Penrose 1998):

$$i\hbar \partial_t \psi(t, \vec{x}) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta - Gm^2 \int \frac{|\psi(t, \vec{y})|^2}{\|\vec{x} - \vec{y}\|} d^3y \right) \psi(t, \vec{x})$$

- ▶ Die SNG hat dieselben symmetrien wie die gewöhnliche SG:
Volle inhomogene Galilei-Gruppe, einschließlich Paritätstransformationen und Bewegungsumkehr, sowie globale $U(1)$ Phasentransformationen.
- ▶ Weiter besitzt sie die folgende Skalenvarianz: Sei

$$S_\lambda[\psi](t, \vec{x}) := \lambda^{9/2} \psi(\lambda^5 t, \lambda^3 \vec{x})$$

dann erfüllt $S_\lambda[\psi]$ die SNG mit Massenparameter λm genau dann wenn ψ die SNG mit Massenparameter m erfüllt.

GR & QM

Domenico Giulini

The Big Picture

- Fundamentalkonstanten
- Planck Skalen

Äquivalenzprinzip

- Galilei
- Newton
- Hertz
- heute

QM & ÄP

- braucht
- widerspricht
- widerspricht nicht!
- nutzt

Eigengravitation

- Einstein semi-klassisch
- Schrödinger/Newton
- gebundene Zustände
- zeitabhängige Zustände

Schluss

Eine grobe Abschätzung des Grundzustands

- Eine grobe Abschätzung des Grundzustands kann wie üblich erreicht werden: Man setzt

$$E \approx \frac{\hbar^2}{2ma^2} - \frac{Gm^2}{2a}.$$

und minimiert in a .

- Dies liefert

$$a_0 = \frac{2\hbar^2}{Gm^3} = 2L_P \cdot \left(\frac{M_p}{m}\right)^3, \quad E_0 = -\frac{1}{8} \frac{G^2 m^5}{\hbar^2}$$

Numerisch $1/8 \rightarrow 0,163$ (Moroz, Penrose und Tod 1998).

- Diese Abschätzung ist innerhalb der gemachten Näherung für schwache Felder (Einstein $\rightarrow$ Newton) nur dann glaubwürdig, wenn der Kompaktheitsparameter nicht in die Nähe des Wertes für ein schwarzes Loch kommt:

$$a_0 = \frac{2\hbar^2}{Gm^3} \gg \frac{2Gm}{c^2} \Leftrightarrow \left(\frac{m}{M_p}\right)^4 \ll 1$$

GR & QM

Domenico Giulini

The Big Picture

- Fundamentalkonstanten
- Planck Skalen

Äquivalenzprinzip

- Galilei
- Newton
- Hertz
- heute

QM & ÄP

- braucht
- widerspricht
- widerspricht nicht!
- nutzt

Eigengravitation

- Einstein semi-klassisch
- Schrödinger/Newton
- gebundene Zustände
- zeitabhängige Zustände

Schluss

Gravitationsinduzierte Fokussierung

- Betrachte Gauß'sches Wellenpaket der Breite a :

$$\Psi(r, t) = (\pi a^2)^{-3/4} \left(1 + \frac{i \hbar t}{m a^2}\right)^{-3/2} \exp\left(-\frac{r^2}{2a^2 \left(1 + \frac{i \hbar t}{m a^2}\right)}\right)$$

- Die radiale Wahrscheinlichkeitsverteilung $\rho(r, t) = 4\pi r^2 |\Psi(r, t)|^2$ hat ein globales Maximum bei

$$r_p = a \sqrt{1 + \frac{\hbar^2 t^2}{m^2 a^4}} \Rightarrow \ddot{r}_p = \frac{\hbar^2}{m^2 r_p^3}$$

- Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist dessen durch die freie Dispersion nach außen gerichtete Beschleunigung gegeben durch $\ddot{r}_p$. Sie gleicht der nach innen gerichteten gravitativen Beschleunigung $\frac{G m}{r^2}$ falls

$$m^3 a = M_P^3 L_P$$

- Für $a = 500 \text{ nm}$ ergibt dies eine grobe Abschätzung des Schwellenwertes für die Masse, oberhalb der Fokussierung eintritt, von $4 \times 10^9 \text{ amu}$.

GR & QM

Domenico Giulini

The Big Picture

- Fundamentalkonstanten
- Planck Skalen

Äquivalenzprinzip

- Galilei
- Newton
- Hertz
- heute

QM & ÄP

- braucht
- widerspricht
- widerspricht nicht!
- nutzt

Eigengravitation

- Einstein semi-klassisch
- Schrödinger/Newton
- gebundene Zustände
- zeitabhängige Zustände

Schluss

Zeitabhängige SNG

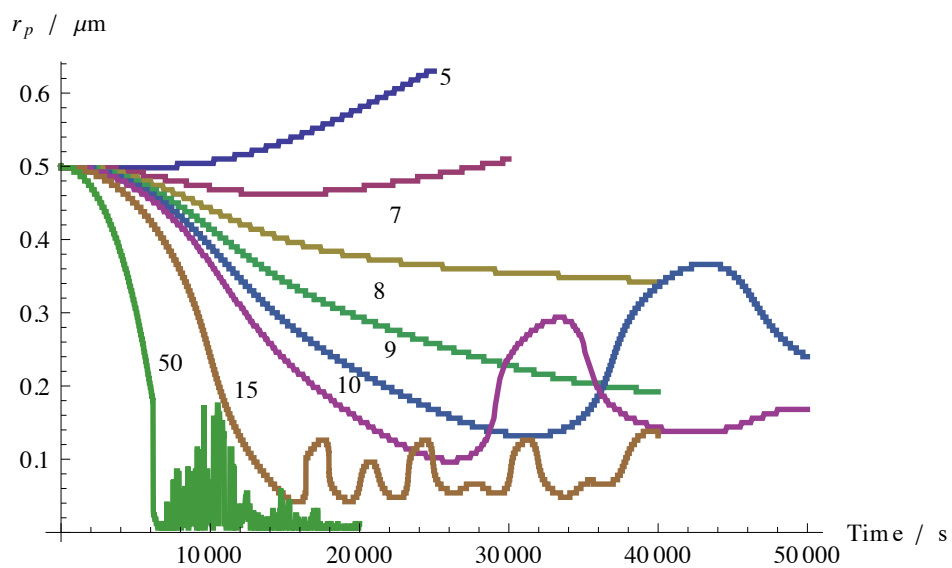


Abbildung: Zeitentwicklung des Maximums der radialen Wahrscheinlichkeitsdichte für Massen oberhalb 5×10^9 amu in Wellenpaketen von anfänglich 500 nm Breite. Im gezeigten Zeitintervall treten erste gravitationsinduzierte Kollapse bei Massen oberhalb 9×10^9 amu auf. (A. Großardt 2011)

GR & QM

Domenico Giulini

The Big Picture

- Fundamentalkonstanten
- Planck Skalen

Äquivalenzprinzip

- Galilei
- Newton
- Hertz
- heute

QM & ÄP

- braucht
- widerspricht
- widerspricht nicht!
- nutzt

Eigengravitation

- Einstein semi-klassisch
- Schrödinger/Newton
- gebundene Zustände
- zeitabhängige Zustände

Schluss

Schluss

- ▶ Die Quantenmechanik widerspricht *nicht* dem ÄP. Letzteres bedarf aber einer angepassten Formulierung. Sogenannte “Quantentests” des Äquivalenzprinzips müssen sich dieser angepassten Formulierung bedienen.
- ▶ Die intendierte Konsequenz des ÄP ist, dass die Wechselwirkung zwischen Materie und Gravitation ausschließlich durch geometrische Strukturen der Raumzeit beschrieben werden kann, die für alle Formen von Materie einheitlich sind (universelles Kopplungsschema).
- ▶ Alle experimentell untersuchten Kopplungen von Quanten-Materie an Gravitation betreffen *äußere* Gravitationsfelder (Erde, Mond, Galaxie).
- ▶ Innerhalb des Anwendungsbereichs der semi-klassischen Einsteingleichungen erwartet man nicht-lineare Korrekturen zur Schrödingergleichung, die zu deutlichen Abschwächungen der Dispersion für bestimmte Verteilungsbreiten und Massen führen.
- ▶ Für Massen oberhalb 6.5×10^9 amu und Breiten um 500 nm betragen die Refokussierungszeiten einige Stunden. Gemäß dem Skalierungsgesetz führt aber z.B. die 10-fache Masse und 10^{-3} -fache Breite zur 10^{-5} -fachen Refokussierungszeit.
- ▶ Experimentelle Realisierungen “Großer Superpositionen” sind derzeit ein *sehr* aktuelles Forschungsthema!

VIELEN DANK FÜR IHRE GEDULD!

GR & QM

Domenico Giulini

The Big Picture

- Fundamentalkonstanten
- Planck Skalen

Äquivalenzprinzip

- Galilei
- Newton
- Hertz
- heute

QM & ÄP

- braucht
- widerspricht
- widerspricht nicht!
- nutzt

Eigengravitation

- Einstein semi-klassisch
- Schrödinger/Newton
- gebundene Zustände
- zeitabhängige Zustände

Schluss

Schluss

- ▶ Die Quantenmechanik widerspricht *nicht* dem ÄP. Letzteres bedarf aber einer angepassten Formulierung. Sogenannte “Quantentests” des Äquivalenzprinzips müssen sich dieser angepassten Formulierung bedienen.
- ▶ Die intendierte Konsequenz des ÄP ist, dass die Wechselwirkung zwischen Materie und Gravitation ausschließlich durch geometrische Strukturen der Raumzeit beschrieben werden kann, die für alle Formen von Materie einheitlich sind (universelles Kopplungsschema).
- ▶ Alle experimentell untersuchten Kopplungen von Quanten-Materie an Gravitation betreffen *äußere* Gravitationsfelder (Erde, Mond, Galaxie).
- ▶ Innerhalb des Anwendungsbereichs der semi-klassischen Einsteingleichungen erwartet man nicht-lineare Korrekturen zur Schrödingergleichung, die zu deutlichen Abschwächungen der Dispersion für bestimmte Verteilungsbreiten und Massen führen.
- ▶ Für Massen oberhalb 6.5×10^9 amu und Breiten um 500 nm betragen die Refokussierungszeiten einige Stunden. Gemäß dem Skalierungsgesetz führt aber z.B. die 10-fache Masse und 10^{-3} -fache Breite zur 10^{-5} -fachen Refokussierungszeit.
- ▶ Experimentelle Realisierungen “Großer Superpositionen” sind derzeit ein *sehr* aktuelles Forschungsthema!

VIELEN DANK FÜR IHRE GEDULD!

GR & QM

Domenico Giulini

The Big Picture

- Fundamentalkonstanten
- Planck Skalen

Äquivalenzprinzip

- Galilei
- Newton
- Hertz
- heute

QM & ÄP

- braucht
- widerspricht
- widerspricht nicht!
- nutzt

Eigengravitation

- Einstein semi-klassisch
- Schrödinger/Newton
- gebundene Zustände
- zeitabhängige Zustände

Schluss