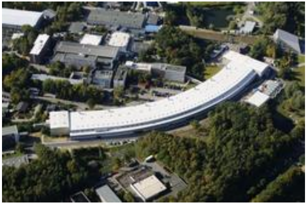
ETC....

... ODER WAS MAN AUS TURN-BY-TURN DATEN LERNEN KANN.

Alexander Kling

MPE - DESY

Grömitz
22. März 2010



Outline.

1. Wozu Turn-by-turn Daten

Outline.

1. Wozu Turn-by-turn Daten
2. Ein Beispiel: PETRA III

Outline.

1. Wozu Turn-by-turn Daten
2. Ein Beispiel: PETRA III
3. Interpretation von Turn-by-turn Daten

Outline.

OUTLINE.

Übersicht.

Nutzen von Turn-by-Turn Daten.

- Fädeln des ersten Umlaufs.

Nutzen von Turn-by-Turn Daten.

- Fädeln des ersten Umlaufs.
- Injektionsstudien.

Nutzen von Turn-by-Turn Daten.

- Fädeln des ersten Umlaufs.
- Injektionsstudien.
- Summensignal gibt eine Möglichkeit zur Strommessung.

Nutzen von Turn-by-Turn Daten.

- Fädeln des ersten Umlaufs.
- Injektionsstudien.
- Summensignal gibt eine Möglichkeit zur Strommessung.
- Post Mortem Analyse bei Strahlverlust.

Nutzen von Turn-by-Turn Daten.

- Fädeln des ersten Umlaufs.
- Injektionsstudien.
- Summensignal gibt eine Möglichkeit zur Strommessung.
- Post Mortem Analyse bei Strahlverlust.
- Schnelle Orbitdaten für Feedbacks.

Nutzen von Turn-by-Turn Daten.

- Fädeln des ersten Umlaufs.
- Injektionsstudien.
- Summensignal gibt eine Möglichkeit zur Strommessung.
- Post Mortem Analyse bei Strahlverlust.
- Schnelle Orbitdaten für Feedbacks.
- Spektrale Analyse der Turn-by-Turn Daten.
  z.B.: Tune Messung, Frequency Map, etc...

LOCO.

Linear Optics from Closed Orbit

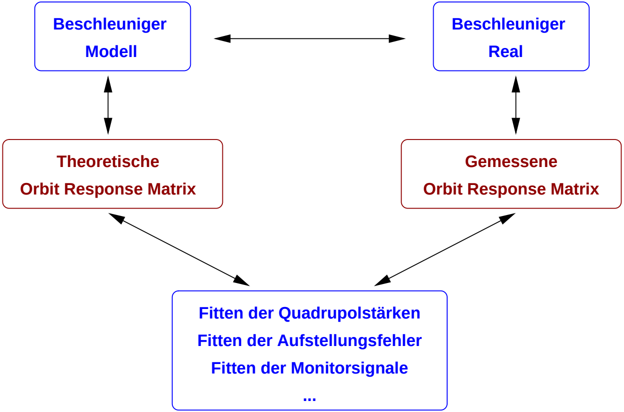


Figure: Kalibration des Beschleuniger Modells mittels ORM.

LOBO.

Linear Optics from Betatron Oscillation

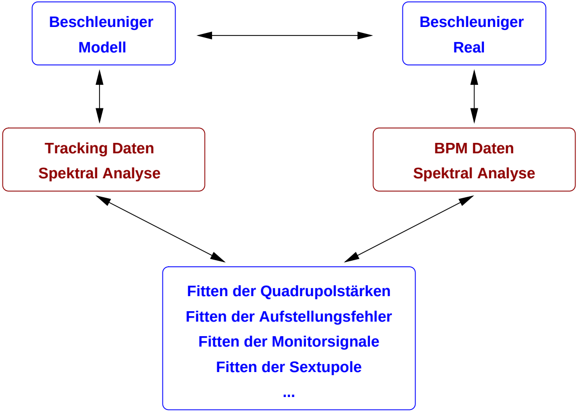


FIGURE: Kalibration des Beschleuniger Modells mittels Turn-by-turn Daten.

nLOBO.

NON LINEAR OPTICS FROM BETATRON OSCILLATION

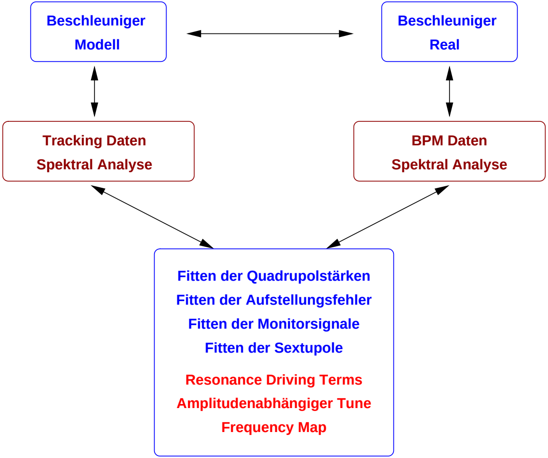


FIGURE: Kalibration des Beschleuniger Modells mittels Turn-by-turn Daten. Information über nichtlineare Dynamik.

Übersicht.

SIXTRACK DATEN VS. REALE DATEN.

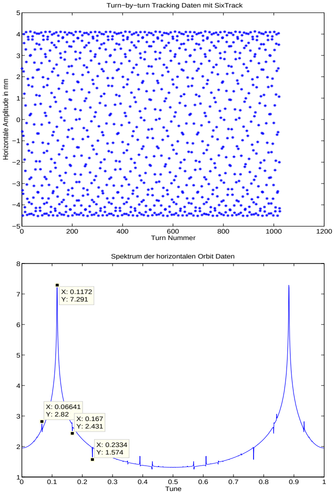


FIGURE: Spektrum horizontaler Orbitdaten erzeugt mit SixTrack. Die Simulation enthält Multipolfehler, aber keine Optikfehler.

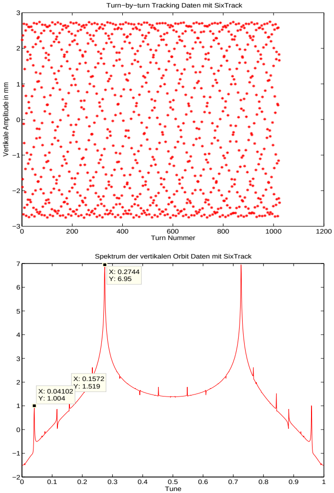


FIGURE: Spektrum vertikaler Orbitdaten erzeugt mit SixTrack. Die Simulation enthält Multipolfehler, aber keine Optikfehler

SIXTRACK DATEN VS. REALE DATEN.

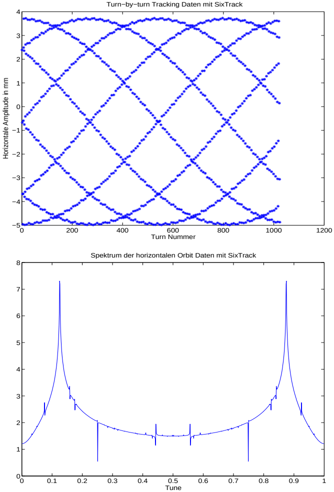


FIGURE: Spektrum horizontaler Orbitdaten erzeugt mit SixTrack. Die Simulation enthält Multipolfehler und Optikfehler, $Q_x = 0.125$.

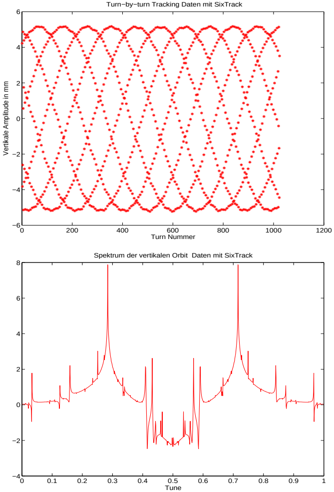


FIGURE: Spektrum vertikaler Orbitdaten erzeugt mit SixTrack. Die Simulation enthält Multipolfehler und Optikfehler.

SixTrack Daten vs. Reale Daten.

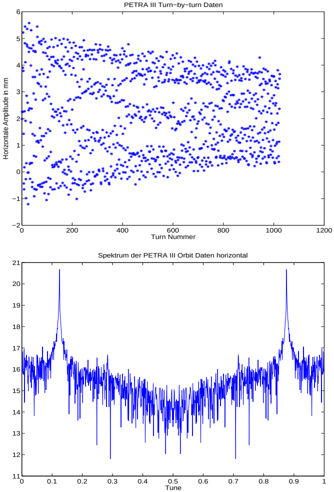


Figure: Spektrum gemessener Orbitdaten in der horizontalen Ebene.

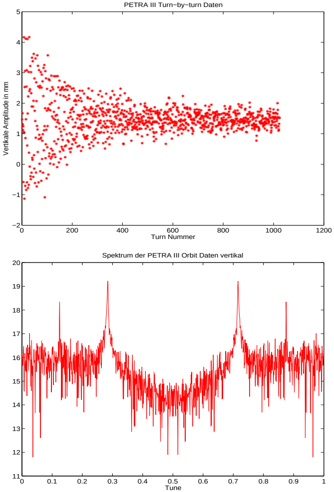


Figure: Spektrum gemessener Orbitdaten in der vertikalen Ebene.

SIXTRACK DATEN VS. REALE DATEN.

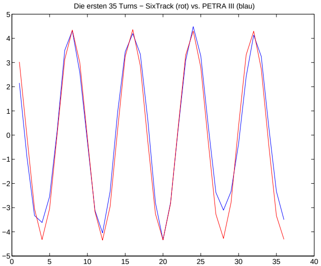


FIGURE: Vergleich der ersten 35 Umläufe simulierter und gemessener Orbitdaten in der horizontalen Ebene.

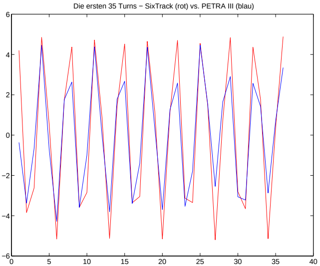


FIGURE: Vergleich der ersten 35 Umläufe simulierter und gemessener Orbitdaten in der vertikalen Ebene.

SIXTRACK DATEN VS. REALE DATEN.

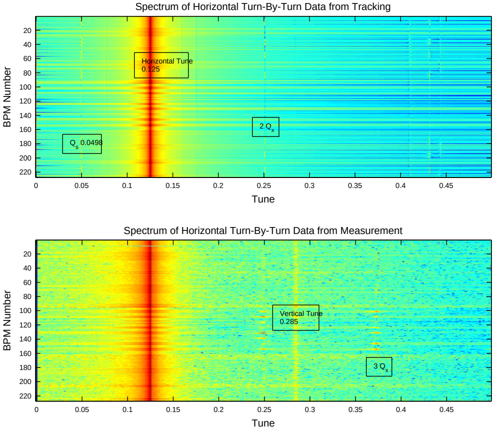


FIGURE: Vergleich des gemessenen horizontalen Spektrums mit Tracking Daten erzeugt mit einer modifizierten SixTrack Version (Dank an M. Vogt!). Das Modell enthält sowohl Quadrupol- als auch Multipolfehler.

SixTrack Daten vs. Reale Daten.

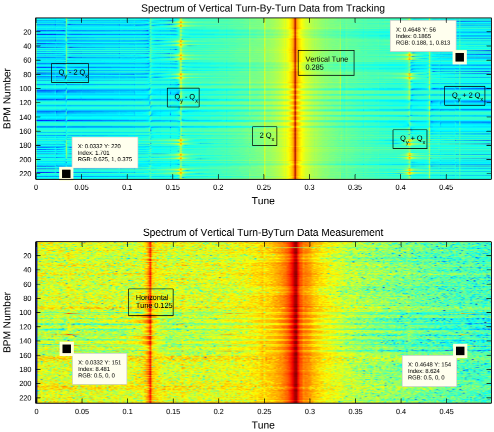


FIGURE: Vergleich des gemessenen vertikalen Spektrums mit Tracking Daten erzeugt mit einer modifizierten SixTrack Version (Dank an M. Vogt!). Das Modell enthält sowohl Quadrupol- als auch Multipolfehler.

SixTrack Daten vs. Reale Daten.

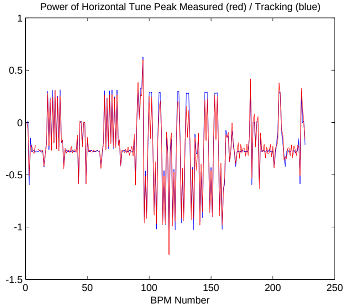


FIGURE: Gemessenes (rot) Powerspektrum des horizontalen Tunes im Vergleich mit Tracking Daten (blau). Das Signal ist proportional zur horizontalen Betafunktion - Optikmessung.

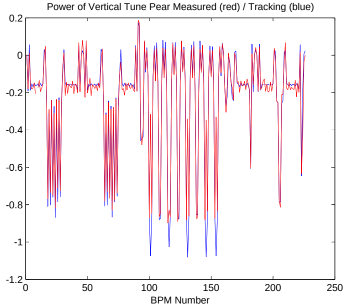


FIGURE: Gemessenes (rot) Powerspektrum des vertikalen Tunes im Vergleich mit Tracking Daten (blau). Das Signal ist proportional zur vertikalen Betafunktion - Optikmessung.

SIXTRACK DATEN VS. REALE DATEN.

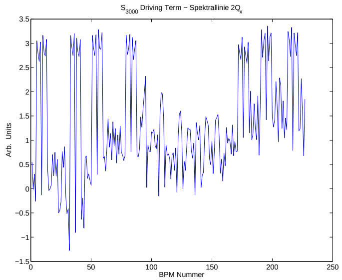


FIGURE: Verlauf des Sextupol Driving Terms S_{3000} entlang des Ringes ermittelt aus den Tracking Daten mittels SixTrack. Entspricht der Linie $2Q_x$ im horizontalen Spektrum.

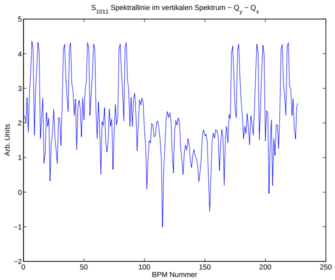


FIGURE: Verlauf des Sextupol Driving Terms S_{1011} entlang des Ringes ermittelt aus den Tracking Daten mittels SixTrack. Entspricht der Linie $Q_y - Q_x$ im vertikalen Spektrum.

Übersicht.

Spektrale Zerlegung quasiperiodischer Bewegung.

- Stabile Bewegung um einen Fixpunkt.
- Transformation auf Winkel-Wirkungs Variable:

$$(p, q) \rightarrow (J, \Phi)\,.$$

- Phasenraum Vektor muss eine periodische Funktion der Winkelvariablen sein:

$$z_j = \sum_{\mathbf{m}} a_{j,\mathbf{m}} e^{2\pi \mathrm{i}\, m_i \Phi_i}$$

- z_j ist im Allgemeinen keine periodische Funktion der Zeit!

Normal Form der Hamiltonschen Funktion.

- Um einen Elliptischen Fixpunkt kann der quadratische Anteil der Hamiltonschen Funktion immer in die Form

$$H_2 = \sum_i \frac{\omega_i}{2} \left(P_i^2 + Q_i^2\right)$$

gebracht werden.

- In der Birkhoff Normal Form stellt sich die volle Hamiltonsche Funktion als Polynom in den Wirkungen

$$W_i = \frac{1}{2} \left(P_i^2 + Q_i^2\right)$$

dar.

$$H = \sum_i H_i \,, \quad H_i = a_{m_i} W^{m_i} \,, \quad \sum m_i = i \,.$$

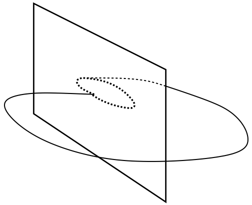
Normal Form der Hamiltonschen Funktion.
Resonanzbedingung

- Man schreibt statt
$$\frac{1}{2}\left(P_i^2 + Q_i^2\right) \rightarrow z\bar{z}\,.$$
- Sukzessive kanonische Transformationen mit homogenen Polynomen vom Grad N
$$F_2(Z,\bar{z}) \;=\; Z\bar{z} + S_N(Z,\bar{z})\,.$$
- In der Ordnung N erhält man aus der Transformation von H_2
$$K_N \;=\; \sum_i \frac{\omega_i}{2}\left(Z_i\frac{\partial}{\partial Z_i} - \bar{Z}_i\frac{\partial}{\partial \bar{Z}_i}\right) S_N(Z,\bar{Z}) + H_N(Z,\bar{Z})\,.$$
- Für $S_N \sim a_{\alpha\beta} Z_i^{\alpha_i} \bar{Z}_i^{\beta_i}$ erhält man
$$K \sim S_N \sum_i \omega_i(\alpha_i - \beta_i) + H_N(Z,\bar{Z})$$
- Das heißt, Terme mit
$$\alpha = \beta \quad \text{und unter der Bedingung} \quad \sum_i a_i\omega_i = 0$$
können nicht eliminiert werden.

Diskrete Zeitschritte - Maps.

Lineare Abbildungen

- Stroboskopische Abbildung für periodische Systeme. Poincaré Section.



- Lineare One-Turn-Map (1d)

$$M = \begin{pmatrix} \cos 2\pi Q + \alpha \sin 2\pi Q & \beta \sin 2\pi Q \\ -\gamma \sin 2\pi Q & \cos 2\pi Q - \alpha \sin 2\pi Q \end{pmatrix} .$$

Oder

$$M = \cos 2\pi Q \mathbb{1} + \sin 2\pi Q J = e^{2\pi Q J}$$

mit

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\gamma & -\alpha \end{pmatrix} , \quad J^2 = -\mathbb{1}$$

Diskrete Zeitschritte - Maps.

Nicht lineare Abbildungen

- Verallgemeinerung entweder direkt über Potenzreihen (Taylor Maps)

$$M(X) = \sum_i M_i(X) \qquad M_i(X) = M \cdot X^i \,.$$

  Ist im allgemeinen nicht symplektisch.

- Lie-Algebra Methode benutzt für die nicht lineare Verallgemeinerung die natürlich gegebene Struktur der Poisson Klammer

$$[f(X), g(X)]_{\mathrm{pb}} = S^{mn} \frac{\partial f}{\partial X^m} \frac{\partial g}{\partial X^n}$$

  mit

$$S = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} .$$

- Die Poisson Klammer erfüllt die Jacobi Identität

$$[f,\cdot][g,h] = [[f,g],h] + [g,[f,h]] \quad \Rightarrow \quad \sum_{fgh} [f,[g,h]] = 0 \,.$$

  Die wesentliche definierende Eigenschaft einer Lie-Algebra.

Diskrete Zeitschritte - Maps.

Nicht lineare Abbildungen - Zeitentwicklung

- Hamiltonschen Bewegungsgleichungen

$$\dot{X}^m = -[H(X), X^m] = -S^{kl}\frac{\partial H}{\partial X^k}\frac{\partial X^m}{\partial X^l} = S^{mk}\partial_k H\,.$$

- Formale Integration (Kleinbuchstaben für Phasenraumfunktionen, Großbuchstaben für Operatoren)

$$\mathrm{d}x^m = -[H,\cdot]x^m\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad x^m(t) = e^{-tH}x^m(0)\,.$$

- Test: Quadratischer Hamiltonian

$$H(x) = \frac{\omega}{2}x^m x^n H_{mn} \quad \Rightarrow \quad x(t) = e^{\omega tSH}x\,,$$

In Verzweiflung setze ich $SH = J$ (für 1d) und finde wegen $J^2 = -\mathbb{1}$ (nach Reihenentwicklung der Exponentialfunktion)

$$x(t) = \mathbb{1}\cos\omega t + J\sin\omega t\,, \quad H(x,x') = \frac{\omega}{2}(\gamma x^2 + 2\alpha x x' + \beta x'^2)\,.$$

Normal Form von Lie-Abbildungen.

- Such eine Normal Form nach dem Schema

$$\begin{aligned} x(T) &= e^{-H}x(0) \quad \Rightarrow \\ u(T) &= e^{A}x(T) = e^{A}e^{-H}x(0) = e^{A}e^{-H}e^{-A}e^{A}x(0) = e^{A}e^{-H}e^{-A}u(0)\,. \end{aligned}$$

sodaß

$$N := e^{A}e^{-H}e^{-A}$$

möglichst einfach wird.

- Typische Wahl für den linearen Anteil

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\beta}} & 0 \\ \frac{\alpha}{\sqrt{\beta}} & \sqrt{\beta} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad AJA^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Wahl ist nicht eindeutig! Z.B.:

$$B = \begin{pmatrix} \sqrt{\gamma} & \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \end{pmatrix}$$

leistet dasselbe!

Normal Form von Lie-Abbildungen.

Freiheit in der Normal Form Transformation

- Mit der Wahl von A wird aus dem quadratischen Anteil der Hamiltonschen Funktion

$$H(x,x') = \frac{\mu_x}{2}\left(\left(\frac{x}{\sqrt{\beta}}\right)^2 + \left(\frac{\alpha x + \beta x'}{\sqrt{\beta}}\right)^2\right) = \frac{\mu}{2}(\hat{x}^2 + \hat{p}^2)\,.$$

- A und B unterscheiden sich um eine Rotation

$$R = BA^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} & \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} \\ -\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} \end{pmatrix},$$

und mit $\alpha = \tan\phi$

$$R = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

- Wegen $J^2 = -\mathbb{1}$ definiert J eine sogenannte komplexe Struktur. Mit dem Projektionsoperator

$$P = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \mathrm{i}J)\,, \quad P^2 = P$$

definieren sich in natürlicher Weise komplexe Koordinaten. Die so definierte Transformation führt auch auf eine Normal Form.

Normal Form von Lie-Abbildungen.
Resonanzbasis

- Betrachten wir mal den einfachen Fall

$$M = e^{-H_2} e^{-H_3}$$

und suchen nach einer Transformation auf Normal Form mit dem Ansatz

$$A = e^{F_3} A_2 \quad \Rightarrow \quad N = AMA^{-1} .$$

- Damit ergibt sich in zweiter Ordnung in den Wirkungen

$$\begin{aligned} N &= e^{-AH_2} e^{AH_2} e^{F_3} e^{-AH_2} e^{-AH_3} e^{-F_3} \\ &= e^{-\tilde{H}_2} e^{e^{\tilde{H}_2} F_3} e^{-\tilde{H}_3} e^{-F_3} \\ &= e^{-\tilde{H}_2} e^{(e^{\tilde{H}_2}-1) F_3 - \tilde{H}_3} + \mathcal{O}(I^3) . \end{aligned}$$

- Damit drängt sich folgende Wahl für F_3 auf

$$F_3 = \frac{1}{e^{\tilde{H}_2} - 1} \tilde{H}_3 .$$

NORMAL FORM VON LIE-ABBILDUNGEN.

RESONANZBASIS

- Wählt man eine Darstellung für die nicht linearen Anteile der Abbildung homogene Polynome in der Eigenbasis (Resonanzbasis) von H_2

  $$|abcd\rangle = (\sqrt{I_x}e^{\mathrm{i}\phi_x})^a(\sqrt{I_x}e^{-\mathrm{i}\phi_x})^b(\sqrt{I_y}e^{\mathrm{i}\phi_x})^c(\sqrt{I_y}e^{-\mathrm{i}\phi_x})^d$$

  mit

  $$\tilde{H}_2\,|abcd\rangle \;=\; \mathrm{i}((a-b)\mu_x + (c-d)\mu_y)\,|abcd\rangle\,,$$

  dann erhält man nach Entwicklung der Hamiltonschen Funktion in der Resonanzbasis explizit

  $$F_3 \;=\; \sum_{a+b+c+d=3} \tilde{H}^{(3)}_{abcd}\frac{1}{e^{\mathrm{i}((a-b)\mu_x+(c-d)\mu_y)}-1}|abcd\rangle\,.$$

- Diese Darstellung ist nicht definiert für

  $$e^{\mathrm{i}((a-b)\mu_x+(c-d)\mu_y)} \;=\; 1\,, \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} ((a=b)\wedge(c=d)) & \text{Konstante Anteile}\,, \\ (mQ_x+nQ_y=p) & \text{Resonanz}\,. \end{array}$$

Normal Form von Lie-Abbildungen.

Von Courant-Snyder zur Normal Form ...

- Die Transformation auf Winkel-Wirkungs Variable war nach Wahl von A

$$\hat{x} = \sqrt{2J_x}\cos(\phi_x + \phi_{x_0}) \quad \hat{p}_x = -\sqrt{2J_x}\sin(\phi_x + \phi_{x_0})\,.$$

bzw. nach Wahl von komplexen Variablen

$$h_x = \hat{x} + \mathrm{i}\hat{p}_x = \sqrt{2J_x}e^{\mathrm{i}(\phi_x+\phi_{x_0})}\,,$$
$$\bar{h}_x = \hat{x} - \mathrm{i}\hat{p}_x = \sqrt{2J_x}e^{-\mathrm{i}(\phi_x+\phi_{x_0})}$$

- Die Transformation auf Normal Form

$$\zeta = e^{-F}\mathbf{h}$$

erfolgt über die Entwicklung in homogene Polynome

$$F = \sum_{abcd=n} F^{(n)}_{abcd}|abcd\rangle\,.$$

Normal Form von Lie-Abbildungen.

...und zurück

- Invertieren dieser Relation gibt

$$\mathbf{h} = e^{-F}\zeta$$

und somit in erster Ordnung z.B.

$$\bar{h}_x = \bar{\zeta}_x + [F, \bar{\zeta}_x] = \bar{\zeta}_x - 2\mathrm{i} \sum_{abcd=n} aF^{(n)}_{abcd} |(a-1)bcd\rangle$$

- Die Zeitentwicklung nach N Turns ist in der Normal Form einfach gegeben durch

$$\bar{\zeta}_x(N) = \sqrt{2I_x} e^{\mathrm{i}(2\pi\nu_x(I)N + \psi_{x_0})} .$$

$\nu_x(I)$ ist der amplitudenabhängige Tune!

- Somit erhält man

$$\bar{h}_x(N) = \sqrt{2I_x} e^{\mathrm{i}(2\pi\nu_x(I)N + \psi_{x_0})} - 2\mathrm{i} \sum_{abcd=n} aF^{(n)}_{abcd} (2I_x)^{\frac{a-1+b}{2}} (2I_y)^{\frac{c+d}{2}} e^{-\mathrm{i}((a-1+b)(2\pi\nu_x(I)N + \psi_{x_0}) + (c-d)(2\pi\nu_y(I)N + \psi_{y_0}))} .$$

Normal Form von Lie-Abbildungen.

Vergleich mit Messung

- Unsere Messung konnten wir schreiben als

$$\hat{z}_j \;=\; = \sum_{\mathbf{m}} a_{j,\mathbf{m}} e^{2\pi \mathrm{i}\, m_i \Phi_i}$$

- Durch Koeffizientvergleich mit

$$\begin{aligned}\bar{h}_x(N) &= \sqrt{2I_x} e^{\mathrm{i}(2\pi\nu_x(I)N+\psi_{x_0})} \\ &- 2\mathrm{i} \sum_{abcd=n} a F^{(n)}_{abcd} (2I_x)^{\frac{a-1+b}{2}} (2I_y)^{\frac{c+d}{2}} e^{-\mathrm{i}((a-1+b)(2\pi\nu_x(I)N+\psi_{x_0})+(c-d)(2\pi\nu_y(I)N+\psi_{y_0}))}.\end{aligned}$$

bestimmen sich die $F^{(n)}_{abcd}$.

- Mittels der Relation

$$F^{(n)}_{abcd} = \frac{H^{(n)}_{abcd}}{e^{\mathrm{i}((a-b)\nu_x+(c-d)\nu_y)} - 1}$$

erhält man die Driving Terms in der Hamiltonschen Funktion.

Übersicht.

BESTIMMUNG FREQUENZEN.

- FFT Methoden sind im allgemeinen zu unpräzise

$$\text{FFT} \sim \frac{1}{N}\,,\ \text{für } N \ldots \text{Anzahl der Turns.}$$

- Alternative Methode: NAFF oder Fourier Transformation mit (Hanning-)Filter

$$\text{FT mit Filter} \sim \frac{1}{N^4}\,.$$

- Tune Stabilität sollte etwa 10^{-4} sein!
- Signal zu Rauschverhältnis verhindert eine Bestimmung der Spektrallinien. Auflösung der BPMs!
- Abhängigkeit der gemessenen Amplitude vom Tune durch Digitalisierung des BPM Signals! Kalibration des Kicks!

DEKOHÄRENZ.

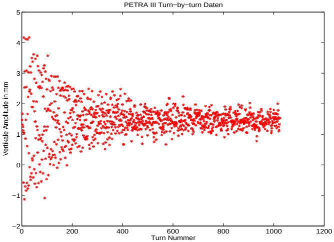


FIGURE: Zerfall der Schwerpunktsbewegung durch Dekohärenz der Teilchenbewegung innerhalb eines Bunches.

- Dekohärenz durch verschiedene im Bunch vertretene Frequenzen.
- Energieabhängige Frequenz über Chromatizität

$$\Rightarrow \quad \xi_{x,y} \sim 0\,.$$

- Amplitudenabhängiger Tune relevant auch innerhalb eines Bunches.

Dekohärenz.
Spektrale Response eines Teilchen-Ensembles

- Amplitudenabängige Frequenzen mit Detuningkoeffizienten

$$\begin{aligned} \nu_x &= Q_x + Q_{xx} 2I_x + Q_{xy} 2I_y \,, \\ \nu_y &= Q_y + Q_{yx} 2I_x + Q_{yy} 2I_y \,, \end{aligned}$$

- Gauß'sche Verteilung der Teilchen im Phasenraum mit Amplitude A

$$\rho(X) = \frac{1}{2\pi \det \sigma} e^{\frac{1}{2}(X-A)^T \sigma^{-1}(X-A)}$$

mit

$$\sigma = \begin{pmatrix} \beta & -\alpha \\ -\alpha & \gamma \end{pmatrix}$$

liefert

$$\rho(I, \psi) = \frac{1}{2\pi} e^{\frac{1}{2}(1I + A^2 - 2A\sqrt{2I}\cos\psi)} \,.$$

Dekohärenz.

Spektrale Response eines Teilchen-Ensembles

- Mittelwert über den Bunch als gewichtetes Integral über den Phasenraum

$$\langle h(N) \rangle = \int \mathrm{d}V_{PR} \rho(I, \psi) h(I, \psi, N) \,.$$

- Analytisch Auswertung im allgemeinen nicht möglich.
- Wesentliche Charakteristische Eigenschaft ist die Skalierung der Spektrallinien (m, n) mit einem Faktor

$$\left| m + n \frac{Q_{xy}}{Q_{xx}} \right| \,.$$

- Breite der Spektrallinie ist invers proportional zur Dekohärenzzeit.
- Dekohärenz ist stärker bei großen Amplituden. Steht in Konkurrenz zu schwachem Signal bei kleinen Amplituden!
- Aber: Dekohärenz ist auch ein Feature!

Übersicht.

ZUSAMMENFASSUNG.

- Turn-by-Turn Daten sind die engen Verwandten von Ein-Teilchen Stahldynamik Rechnungen und Simulationen.
- Analyse von Turn-by-Turn Daten enthält Information über lineare und nicht lineare Dynamik in der Maschine.
- Mögliche (ergänzende) Methode für Kurz-ORM in einer Minute!
- Information über die Existenz nicht lineare Resonanzen und deren Verteilung über den Ring kann durch die Verwendung aller BPMs gewonnen werden.

DANKE!