

# Lagrangeformalismus in der Teilchenphysik

Niklas Pietsch

YIG SUSY Meeting, 3. Mai 2010



# Übersicht

- 1 Motivation
- 2 Lagrangeformalismus in der Quantenfeldtheorie
- 3 Lagrangeformalismus im Standardmodell (ohne Higgs)
- 4 Lagrangeformalismus im Standardmodell (mit Higgs)
- 5 Lagrangeformalismus in der Supersymmetrie (ohne Brechung)
- 6 Zusammenfassung

# Motivation

- In Vorlesungen, Lehrbüchern und Papern zur Teilchenphysik wird oft der Lagrangeformalismus verwendet.
- Der Lagrangeformalismus ermöglicht es, Feldgleichungen in kompakter Form zu formulieren und mögliche Wechselwirkungen zwischen Elementarteilchen schnell zu identifizieren. Daher hilft der Formalismus insbesondere in supersymmetrischen Theorien dabei, die Übersicht zu bewahren.
- Jedoch: Die kompakte Schreibweise beruht auf verschiedenen (teilweise komplizierten) Ausdrücken und Regeln, die man kennen muss, um den Lagrangeformalismus zu verstehen. Damit der Lagrangeformalismus von Nutzen ist, muss man ausserdem wissen welche physikalische Bedeutung die verschiedenen Terme in einer Lagrange-Dichte haben.

# Erinnerung: Lagrangeformalismus in der Klassischen Mechanik

- Prinzip der kleinsten Wirkung:

Jedes mechanische System wird durch eine Lagrangefunktion

$$L(q, \dot{q}, t) \equiv L(\underbrace{q_1, q_2, \dots, q_s}_{\text{verallgemeinerte Koordinaten}}, \underbrace{\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s}_{\text{verallgemeinerte Geschwindigkeiten}}, t) \text{ beschrieben.}$$

Die Bewegung eines Systems erfolgt auf solche Weise, dass das

$$\text{Wirkungsintegral } S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \text{ minimal wird.}$$

- $S$  wird genau dann minimal, wenn die Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s) \text{ erfüllt sind.}$$

- Die Bewegungsgleichung für ein mechanisches System ergibt sich also durch Einsetzen der Lagrangefunktion in die Lagrange-Gleichungen.

# Erinnerung: Lagrangeformalismus in der Klassischen Mechanik

- Beispiel: Massepunkt im Potential  $U(\vec{r})$ 
  - $L(r, v, t) = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 - U(\vec{r})$  ( $q_i = r_i, v_i = \dot{q}_i, i = 1, 2, 3$ )
  - Einsetzen von L in Lagrange-Gleichungen:

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_i}}_{=m\dot{v}_i} - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial r_i}}_{=-\frac{\partial U}{\partial r_i}} = 0 \Rightarrow \underbrace{m\dot{\vec{v}} = -\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial \vec{r}}}_{\text{DGL 2. Ordnung}}$$

# Erinnerung: Vierer-Schreibweise

Einstein Postulate:

- Äquivalenz von Inertialsystemen
- Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

$$\implies c^2 t^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = c^2 t'^2 - x_1'^2 - x_2'^2 - x_3'^2 \text{ (Invarianzbedingung)}$$

$\implies$  Spezielle Lorentz-Transformation (boost in  $x_3$ -Richtung):

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$  Beschreibung im vierdimensionalen Minkowski-Raum

# Erinnerung: Vierer-Schreibweise<sup>1</sup>

## ■ Tensoren nullter Stufe (Vierer-Skalare)

- Invariant unter Lorentz-Transformationen
- z.B.  $s^2 = c^2 t^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ ,  $\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$

## ■ Tensoren erster Stufe (Vierer-Vektoren)

- Kovariante, z.B.  $x^\mu = (t, x_1, x_2, x_3)$ ,  $p^\mu = (E, p_1, p_2, p_3)$
- Kontravariante z.B.  $x_\mu = (t, -x_1, -x_2, -x_3)$ ,  $p_\mu = (E, -p_1, -p_2, -p_3)$

## ■ Tensoren zweiter Stufe (als Matrizen darstellbar)

- Kovariante, z.B. der metrische Tensor

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Kontravariante, z.B. der elektromagnetische Feldstärketensor  $F^{\mu\nu}$
- Gemischte:  $F^\mu_\nu$

<sup>1</sup>Im Folgenden wird  $\hbar = c = 1$  gesetzt.

# Erinnerung: Vierer-Schreibweise

Rechenregeln:

- **Summenkonvention:** Über zweimal vorkommende **griechische**

Indizes wird summiert, z.B.  $x_{\nu'} = \sum_{\nu=0}^3 L_{\mu\nu} x_{\nu} \equiv L_{\mu\nu} x_{\nu}$

- **Skalarprodukt:**

- $(x, y) \equiv x_{\mu} y^{\mu}$ , z.B.  $x_{\mu} x^{\mu} = c^2 t^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = s^2$
- Ist ein Vierer-Skalar

- **Skalare Multiplikation und Addition von Tensoren** wie bei Vektoren und Matrizen

- **Herauf- und Herunterziehen von Indizes:**

- $T^{\dots\alpha\dots} = g^{\alpha\beta} T^{\dots\beta\dots}$ , z.B.  $x^{\alpha} = g^{\alpha\beta} x_{\beta}$
- $T^{\dots\alpha\dots} = g_{\alpha\beta} T^{\dots\beta\dots}$ , z.B.  $F^{\mu\nu}_{\beta} = g_{\alpha\beta} F^{\mu\nu\alpha}$

# Lagrangeformalismus in der Quantenfeldtheorie

- Prinzip der kleinsten Wirkung:

Jedes Feld  $\phi(x)$  wird durch eine Lagrange-Dichte  $L(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))$  beschrieben. ( $\partial_\mu = (\frac{\partial}{\partial t}, \nabla)$ )

Die “Bewegung” eines Feldes erfolgt auf solche Weise, dass das

Wirkungsintegral  $S = \int_{t_1}^{t_2} dt \underbrace{\int L(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) d^3x}_{\text{Lagrange-Funktion}}$  minimal wird.

- $S$  wird genau dann minimal, wenn die Lagrange-Gleichungen

$$\partial_\mu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi(x))} - \frac{\partial L}{\partial \phi(x)} = 0 \text{ erfüllt sind.}$$

- Die “Bewegungsgleichung” für ein quantisiertes Feld (Feldgleichung) ergibt sich also durch Einsetzen der Lagrange-Dichte in die Lagrange-Gleichungen.

# Lagrangeformalismus in der Quantenfeldtheorie

## ■ Beispiel 1: Freies massives Spin-1/2-Feld

■  $L_{\text{Dirac}} = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x)$  mit

$$i\gamma^\mu\partial_\mu = i\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \dots + i\frac{\partial}{\partial x_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\implies \psi(x)$  ist ein Dirac-Spinor bzw. Spinor-Feld

### ■ Einsetzen von L in Lagrange-Gleichungen:

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = 0 \text{ (Dirac-Gleichung)}$$

### ■ Diracs Ansatz zur Herleitung der Dirac-Gleichung:

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x)}{\partial t} = \underbrace{\left(i\hbar c\left(\alpha_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \alpha_3\frac{\partial}{\partial x_3}\right) + \beta mc^2\right)}_{\equiv H} \psi(x)$$

# Lagrangeformalismus in der Quantenfeldtheorie

- Beispiel 2: Freies elektromagnetisches Feld  $A^\mu = (\phi, \vec{A})$ 
  - $L_{\text{EM}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$  ( $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ )
  - Einsetzen von L in Lagrange-Gleichungen:
    - $A^\mu - \partial^\mu(\partial_\nu A^\nu) = 0$  (Vierer-Wellengleichung im Vakuum)
    - ⇒ Ableitung der Maxwell-Gleichungen (siehe Anhang)
  - In klassischer Elektrodynamik umgekehrt:  
Maxwell-Gleichungen werden zur Vierer-Wellengleichung zusammengefasst (siehe z.B. Nolting Bd. 4)

# Lagrangeformalismus in der Quantenfeldtheorie

## ■ Beispiel 3: Freies massives Vektorfeld $W^\mu$

- $L_W = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2W_\mu W^\mu$  ( $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu$ )

- Einsetzen von L in Lagrange-Gleichungen:

- $W^\mu - \partial^\mu(\partial_\nu W^\nu) + m^2W^\mu = 0$  (Proca-Gleichung)

- Zusätzlicher Term aufgrund *massiver* Teilchen

- Proca-Gleichung nur für  $m = 0$  ( $\rightarrow$  Vierer-Wellengleichung) invariant unter Eichtransformation  $W^\mu \rightarrow W^{\mu'} = W^\mu - \partial^\mu \chi(x)$ :

- $W^{\mu'} - \partial^\mu(\partial_\nu W^{\nu'}) + m^2W^{\mu'} =$

- $W^\mu - \square \partial^\mu \chi(x) - \partial^\mu(\partial_\nu W^\nu) + \partial^\mu(\partial_\nu \partial^\mu \chi(x)) + m^2W^\mu - m^2 \partial^\mu \chi(x) =$

- $W^\mu - \partial^\mu(\partial_\nu W^\nu) + m^2W^\mu - \square \partial^\mu \chi(x) + \partial^\mu(\partial_\nu \partial^\mu \chi(x)) - m^2 \partial^\mu \chi(x)$

Feldgleichung für  $W^\mu$

=0

"zerstört"  
Eichinvarianz

$\implies$  Zunächst werden Teilchen als masselos angenommen

# Lagrangeformalismus im Standardmodell (ohne Higgs)

Zunächst werden Fermionen und Eichbosonen als masselos angenommen. Die Lagrange-Dichte des Standardmodells  $L_{\text{SM}}$  muss dann Terme für

- Fermionen ✓
- Eichbosonen:
  - $B^\mu$  ✓
  - $W_i^\mu$  ( $i = 1, 2, 3$ )  $\implies F_i^{\mu\nu} = \partial^\mu W_i^\nu - \partial^\nu W_i^\mu - g\epsilon_{ijk} W_j^\mu W_k^{\nu\mu}$
  - $G_j^\mu$  ( $j = 1, \dots, 8$ )  $\implies F_j^{\mu\nu} = \partial^\mu G_j^\nu - \partial^\nu G_j^\mu - g_s f_{ikl} G_k^\mu G_l^\nu$

(Epsilon-Tensor  $\epsilon_{ijk}$ , Strukturkonstanten  $f_{ikl}$ )
- Kopplung der Eichbosonen an Fermionen enthalten.

Ohne Kopplung:

$$L_{\text{SM}} = \underbrace{\bar{\psi}(x) i \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x)}_{= L_{\text{Dirac}}} - \underbrace{\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}}_{\equiv L_B} - \underbrace{\frac{1}{4} F_{\mu\nu i} F_i^{\mu\nu}}_{\equiv L_W} - \underbrace{\frac{1}{4} F_{\mu\nu j} F_j^{\mu\nu}}_{\equiv L_{\text{Gluon}}}$$

# Kopplung der Eichbosonen an Fermionen

- Beispiel: Fermion  $\psi$  im elektromagnetischen Feld  $A^\mu$

- $L = \underbrace{\bar{\psi}(x)i\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x)}_{= L_{\text{Dirac}}} - j^\mu A_\mu$

mit dem Vierer-Strom  $j^\mu = q\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$

- Einsetzen in Lagrange-Gleichungen:

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) = q\gamma^\mu A_\mu\psi(x)$$

(Dirac-Gleichung für Spin-1/2-Teilchen im elektrom. Feld)

- Übliche Schreibweise:

$$L = \bar{\psi}(x)i\gamma^\mu D_\mu\psi(x)$$

$i\gamma^\mu D_\mu\psi(x) = 0$  mit  $D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$  (kovariante Ableitung)

- Allgemein:

Kopplung von Vektorfeld  $A_\mu$  mit Stärke  $g$  an Fermionfeld  $\psi(x)$

$$L = \bar{\psi}(x)i\gamma^\mu D_\mu\psi(x) \text{ mit } D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu$$

## Kopplung der Eichbosonen an Fermionen

$$D_{SM}^\mu = \partial^\mu + \underbrace{\frac{i}{2}g(\tau_1 W_1^\mu + \dots + \tau_3 W_3^\mu)}_{\frac{i}{\sqrt{2}}g(\tau_- W_+^\mu + \tau_+ W_-^\mu) + iqA^\mu + g_z Z^\mu} + \frac{i}{2}g' B^\mu + i\frac{i}{2}g_s(\lambda_1 G_1^\mu + \dots + \lambda_8 G_8^\mu)$$

(Überlagerung von  $W_1^\mu$  und  $W_2^\mu$  zu  $W_+^\mu$  und  $W_-^\mu$  und  $W_3^\mu$  und  $B^\mu$  zu  $A^\mu$  und  $Z^\mu$ , siehe z.B. Schmüser)

Mit Kopplung:

$$L_{SM} = \underbrace{\bar{\psi}(x) i \gamma^\mu D_\mu \psi(x)}_{= L_{\text{Dirac}}} - \underbrace{\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}}_{\equiv L_B} - \underbrace{\frac{1}{4} F_{\mu\nu i} F_i^{\mu\nu}}_{\equiv L_W} - \underbrace{\frac{1}{4} F_{\mu\nu j} F_j^{\mu\nu}}_{\equiv L_{\text{Gluon}}} \text{ mit}$$

$$D^\mu = \partial^\mu + \frac{i}{\sqrt{2}}g(\tau_- W_+^\mu + \tau_+ W_-^\mu) + iqA^\mu + g_z Z^\mu + i\frac{i}{2}g_s(\lambda_1 G_1^\mu + \dots + \lambda_8 G_8^\mu)$$

$\implies$  Es fehlen noch Terme der Form  $m\bar{\psi}(x)\psi(x)$  und  $\frac{1}{2}m^2 W_\mu W^\mu$  für die Massen von Fermionen und Bosonen.

# Lagrangeformalismus im Standardmodell (mit Higgs)

Die Massen von Fermionen und Bosonen werden durch Wechselwirkung mit dem Higgs-Feld im Grundzustand erklärt. Die Lagrange-Dichte des Standardmodells muss dann Terme für

- Fermionen ✓
- Eichbosonen ✓
- Kopplung der Eichbosonen an Fermionen ✓
- Higgs
- Kopplung des Higgs an Eichbosonen
- Kopplung des Higgs an Fermionen

# Higgs-Feld und Kopplung des Higgs an Eichbosonen

- Einführung zweier komplexer Spin-0 Felder  $\phi^+ = \phi_1^+ + i\phi_2^+$  und  $\phi^0 = \phi_1^0 + i\phi_2^0$
- $L_{\text{Higgs}} = (\partial_\mu \Phi)(\partial^\mu \Phi) - V(\Phi^\dagger \Phi)$  mit  $\Phi = (\phi^+, \phi^0)^T$  und  $V(\Phi^\dagger \Phi) = -\mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda^2 (\Phi^\dagger \Phi)^2$
- Kopplung an Eichbosonen:  $\partial^\mu \rightarrow D^\mu$   
 $L_{\text{Higgs}} = (D_\mu \Phi)(D^\mu \Phi) - \mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda^2 (\Phi^\dagger \Phi)^2$

Nach Wahl eines Grundzustandes  $\Phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$  (mit  $v = \frac{\mu}{\lambda}$ ) von  $\Phi$  ( $\rightarrow$  spontane Symmetriebrechung) und einer Eichtransformation:  $L_{\text{Higgs}} =$

$$\underbrace{\frac{1}{2}(\partial^\mu \eta)(\partial_\mu \eta) - \mu^2 \eta^2}_{\text{Higgs-Feld und Higgs Massenterm}} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{g^2 v^2}{4} (|W_+^\mu|^2 + |W_-^\mu|^2)}_{W_+ \text{ und } W_- \text{ Massenterme}} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{v^2}{4} |g' B^\mu - g W_3^\mu|^2}_{Z \text{ Masseterm}}$$

# Kopplung des Higgs an geladene Fermionen

Yukawa-Kopplung für Leptonen:

- $L_{\text{Yukawa}} = g [\bar{R} (\Phi^\dagger L) + (\bar{L} \Phi) R]$  mit der Kopplungskonstanten  $g$  und den Isospindoublets  $L$  und -singulets  $R$ .
- Proportional zur Masse  
→ d.h. vor allem an Tau
- 3 verschiedene Kopplungskonstanten
- Im Grundzustand des Higgs-Feldes  $\Phi_0 = 1/\sqrt{2} (0, v)^T$  z.B.

$$L_{\text{Yukawa}} = \frac{g}{2} \left[ \bar{e}_R \begin{pmatrix} 0 \\ \nu \\ e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{\nu}_e \\ \bar{e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu \\ e \end{pmatrix} e_R \right]$$

$$= g v [\bar{e}_R e + \bar{e} e_R]$$

Yukawa-Kopplung für Quarks (siehe z.B. Barger/Phillips)

## Lagrange-Dichte für das Standardmodell

Nach elektroschwacher Symmetriebrechung und im Grundzustand des Higgs-Feldes:

$$L_{\text{SM}} = \underbrace{\bar{\psi}(x) i \gamma^\mu D_\mu \psi(x)}_{= L_{\text{Dirac}}} - \underbrace{\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}}_{\equiv L_B} - \underbrace{\frac{1}{4} F_{\mu\nu i} F_i^{\mu\nu}}_{\equiv L_W} - \underbrace{\frac{1}{4} F_{\mu\nu j} F_j^{\mu\nu}}_{\equiv L_{\text{Gluon}}} + \underbrace{L_{\text{Yukawa}}}_{\text{Fermion Massenterme}}$$

$$\underbrace{\frac{1}{2} (\partial^\mu \eta)(\partial_\mu \eta) - \mu^2 \eta^2}_{\text{Higgs-Feld und Higgs Massenterm}} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{g^2 v^2}{4} (|W_+^\mu|^2 + |W_-^\mu|^2)}_{W_+ \text{ und } W_- \text{ Massenterme}} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{v^2}{4} |g' B^\mu - g W_3^\mu|}_{Z \text{ Masseterm}}$$

$$D^\mu = \partial^\mu + \frac{i}{\sqrt{2}} g (\tau_- W_+^\mu + \tau_+ W_-^\mu) + iq A^\mu + g_z Z^\mu + \frac{i}{2} g_s (\lambda_1 G_1^\mu + \dots + \lambda_8 G_8^\mu)$$

# Diskussion

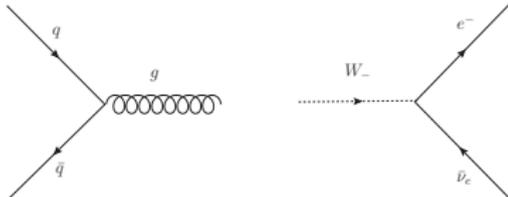
## ■ Kinetische Terme:

Enthalten Vierergradienten der Felder, z.B.

$$\underbrace{\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x)}_{\text{Fermion-Feld}}, \quad \underbrace{(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu)}_{\text{elektrom. Feld}} \quad \text{und} \quad \underbrace{(\partial^\mu\eta)(\partial_\mu\eta)}_{\text{Higgs-Feld}}$$

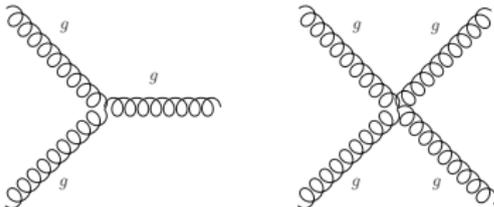
## ■ Wechselwirkungsterme:

**Elementare Feynman-Graphen direkt ablesbar**



The first diagram shows a fermion line with incoming momentum  $q$  and outgoing momentum  $\bar{q}$  interacting with a gauge boson line with momentum  $g$ . The second diagram shows a fermion line with incoming momentum  $e^-$  and outgoing momentum  $\bar{\nu}_e$  interacting with a  $W_-$  boson line with momentum  $g$ .

$$\underbrace{-\frac{g_s}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu G_\mu\psi}_{\text{aus } L_{\text{Dirac}} \text{ mit kovarianter Ableitung}} \quad - \frac{g}{\sqrt{2}}\bar{\psi}\gamma^\mu W_\mu\psi$$



The first diagram shows a three-gluon vertex where three gluon lines with momentum  $g$  meet. The second diagram shows a four-gluon vertex where four gluon lines with momentum  $g$  meet.

aus Term mit Feldstärke Tensor ablesbar;  
Selbstwechselwirkung von Eichbosonen  
nur in nicht-abelschen Eichtheorien

# Diskussion

- Massenterme:  
Enthalten Felder ins Quadrat



$$g v [\bar{e}_R e + \bar{e} e_R]$$

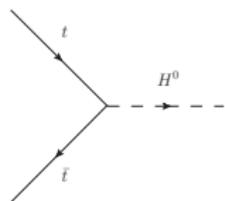
Yukawa-Kopplung mit  
Higgs-Feld im Grundzustand



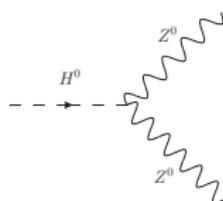
$$\frac{1}{2} \frac{g^2 v^2}{4} |W_+^\mu|^2$$

aus  $L_{\text{Higgs}}$  mit  
kovarianter Ableitung

- Kopplung an Higgs-Feld:



Yukawa-Kopplung



???

# Supersymmetrie

- Invarianz gegenüber globaler SUSY-Transformation  
 $Q | \text{Boson} \rangle = | \text{Fermion} \rangle, Q | \text{Fermion} \rangle = | \text{Boson} \rangle$
- *Superpartner* von  $| \Omega \rangle$ : Zustände  $| \Omega' \rangle = (\dots Q + \dots Q^\dagger) | \Omega \rangle$  (???)
- *Supermultiplett*: Enthält  $| \Omega \rangle$  und Superpartner
- Für “realistische” Theorien erfüllen  $Q$  und  $Q^\dagger$  die SUSY-Algebra:

$$\{Q, Q^\dagger\} = P^\mu \quad (1)$$

$$\{Q, Q\} = \{Q^\dagger, Q^\dagger\} = 0 \quad (2)$$

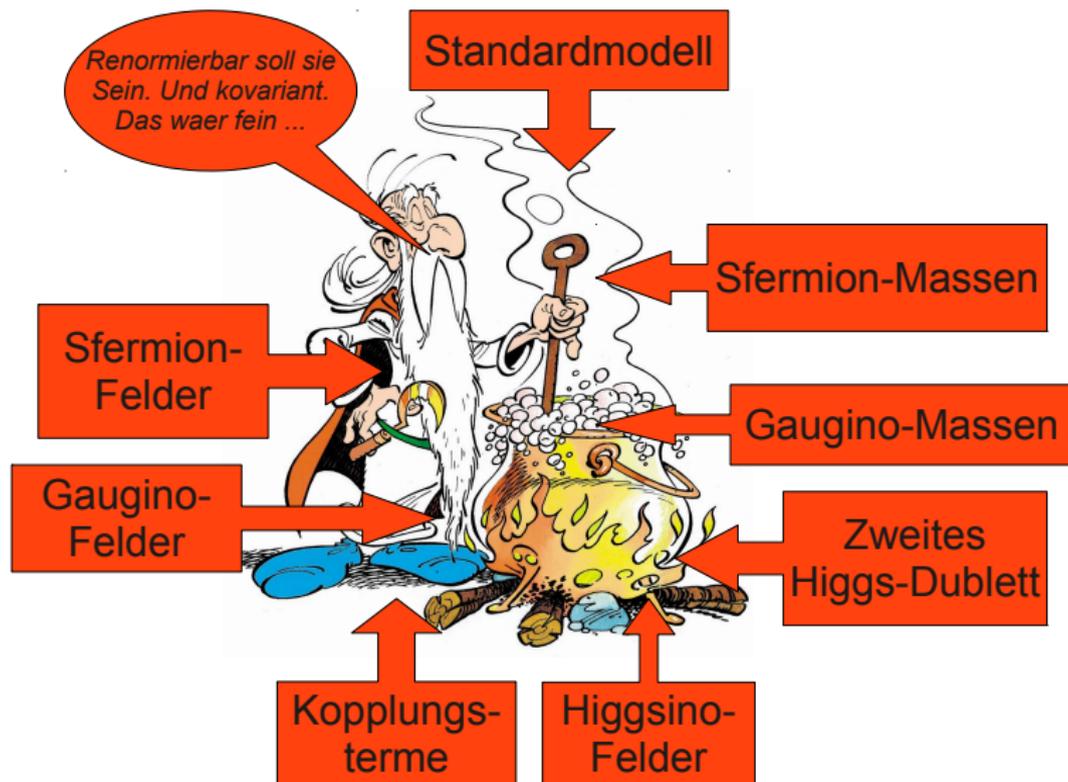
$$\{P^\mu, Q\} = \{P^\mu, Q^\dagger\} = 0 \quad (3)$$

⇒ Die Anzahl von fermionschen und bosonischen Freiheitsgraden in jedem Supermultiplett muss gleich sein

## Minimales Supersymmetrisches Standard Modell

	SM particle	Spin	Sparticle	Spin
Leptons, Sleptons	$e_L, e_R$	1/2	$\tilde{e}_L, \tilde{e}_R$	0
	$\nu_{e,L}, \nu_{e,R}$	1/2	$\tilde{\nu}_{e,L}, \tilde{\nu}_{e,R}$	0
	$\vdots$		$\vdots$	
Quarks, Squarks	$u_L, u_R$	1/2	$\tilde{u}_L, \tilde{u}_R$	0
	$d_L, d_R$	1/2	$\tilde{d}_L, \tilde{d}_R$	0
	$\vdots$		$\vdots$	
Gluon, Gluino	$g$	1	$\tilde{g}$	1/2
W-boson, Wino	$W^{\pm,3}$	1	$\tilde{W}^{\pm,3}$	1/2
B-boson, Bino	$B$	1	$\tilde{B}$	1/2
Higgs, Higgsino	$H_u^0, H_d^0$	0	$\tilde{H}_u^0, \tilde{H}_d^0$	1/2
	$H_u^+, H_d^-$	0	$\tilde{H}_u^+, \tilde{H}_d^-$	1/2
Graviton, Gravitino	$G$	2	$\tilde{G}$	2/3

# Supersymmetrische Lagrange-Dichte



# Sparticle-Felder

- Sfermion-Felder  $\phi$ :

- 2 Freiheitsgrade  $\rightarrow$  2 reelle masselose skalare Felder  
(= 1 komplexes masseloses skalares Feld)

- $L_{\text{Sfermion}} = -\partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi + \underbrace{F^* F}_{\text{Hilfsfeld}}$

- Gaugino-Felder  $\lambda$ :

- 2 Freiheitsgrade  $\rightarrow$  1 masseloses Spin-1/2-Feld mit 2 Freiheitsgraden  
(Weyl-Spinor)

- $L_{\text{Gaugino}} = -i\lambda^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \lambda + \frac{1}{2} \underbrace{D^* D}_{\text{Hilfsfeld}}$

- Zweites Higgs-Dublett: Wie im SM (siehe Folie 17)

- Higgsino-Felder: Spin-1/2/-Felder

## Supersymmetrische Lagrange-Dichte

Vor elektroschwacher Symmetriebrechung:

$$\begin{aligned}
L_{\text{MSSM}} = & \underbrace{-i\psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu D_\mu \psi}_{= L_{\text{Dirac}}} - \underbrace{\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}}_{\equiv L_B} - \underbrace{\frac{1}{4} F_{\mu\nu i} F_i^{\mu\nu}}_{\equiv L_W} - \underbrace{\frac{1}{4} F_{\mu\nu j} F_j^{\mu\nu}}_{\equiv L_{\text{Gluon}}} \\
& + \underbrace{(D_\mu \Phi_{1,2})(D^\mu \Phi_{1,2}) - \mu_{1,2}^2 \Phi_{1,2}^\dagger \Phi_{1,2} + \lambda_{1,2}^2 (\Phi_{1,2}^\dagger \Phi_{1,2})^2}_{\text{Higgs-Felder}} + \underbrace{L_{\text{Yukawa}}}_{\text{Fermion Massen-terme}} \\
& \underbrace{-\partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi + F^* F}_{L_{\text{fermion}}} - \underbrace{i\lambda^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \lambda + \frac{1}{2} D^* D}_{L_{\text{Gaugino}}} + L_{\text{Higgsino}} \quad \text{mit} \\
D^\mu = & \partial^\mu + \frac{i}{\sqrt{2}} g (\tau_- W_+^\mu + \tau_+ W^\mu) + iq A^\mu + g_z Z^\mu + i \frac{1}{2} g_s (\lambda_1 G_1^\mu + \dots + \lambda_8 G_8^\mu)
\end{aligned}$$

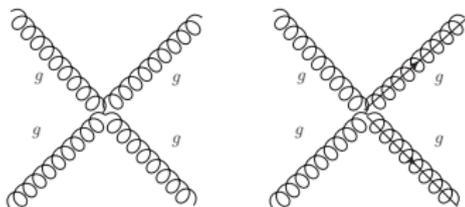
→ Im MSSM werden SM-Fermionen nicht durch Dirac-Spinoren, sondern durch Weyl-Spinoren beschrieben

# Kopplungsterme

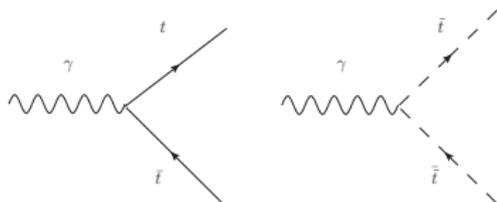
- Kopplung der Sfermionen, Gauginos (und des zweiten Higgs-Dubletts und der Higgsinos) an die Eichbosonen:  $\partial^\mu \rightarrow D^\mu$

Aus der SUSY-Algebra folgt:

**Sfermionen und Gauginos haben dieselben Eichquantenzahlen wie ihre SM-Superpartner und koppeln daher genauso wie diese an die Eichbosonen!**



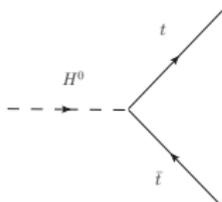
Gluon- und Gluino-Produktion am



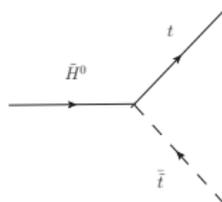
Photon-Top-Top- und Photon-Stop-Stop Vertex

# Kopplungsterme

- Kopplung zwischen Sfermionen und Gauginos/Fermionen: Yukawa-Kopplung

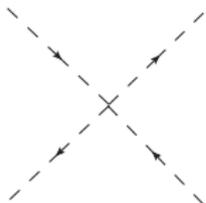


Higgs-top-top



Higgsino-stop-top

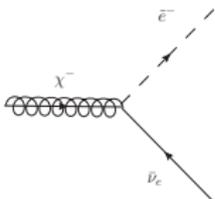
- Kubische und di-quadratische Kopplung von Sfermionen



Di-quadratische Kopplung von Sfermionen

# Kopplungs- und Massenterme

- Zusätzliche Kopplungen: Skalar-Fermion-Gaugino-Kopplungen



“Wino“-Zerfall in Selelektron und Neutrino

- Sfermion-Massenterme:  
Terme der Form  $m^2\phi^2$  (wie der Higgs Massenterm, siehe Folie 17)
- Gaugino-Massenterme

# Supersymmetrische Lagrange-Dichte

Die verschiedenen Terme werden wie folgt zusammengefasst:

- *Fermionen*: Fermion-Felder und Higgsino-Felder (?) mit Kopplung an Eichfelder über  $D^\mu$
- *Eichfelder*: W-Boson, B-Boson und Gluon-Felder
- *Skalare*: Fermion-Felder und Higgs-Felder mit Kopplung an Eichfelder über  $D^\mu$
- *Gauginos*: Gaugino-Felder mit Kopplung an Eichfelder über  $D^\mu$
- *Skalares Potential*: Skalare Kopplungen, Skalare Massenterme, F-Terme, D-Terme
- *Yukawa-Kopplung*: Yukawa-Kopplungen, Fermion Massenterme und Gaugino Massenterme
- *Zusätzliche Kopplungen*

## Supersymmetrische Lagrange-Dichte

Vor elektroschwacher Symmetriebrechung:

$$L_{\text{MSSM}} = \underbrace{-i\psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu D_\mu \psi}_{\text{Fermionen}} - \underbrace{\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}}_{\text{Eichfelder}} - \underbrace{D^\mu \phi^* D_\mu \phi}_{\text{Skalare}} + \underbrace{-i\lambda^\dagger \bar{\sigma}^\mu D_\mu \lambda}_{\text{Gauginos}}$$

$L_{\text{Skalares Potential}} + L_{\text{Yukawa}} + L_{\text{Zusätzliche Kopplungen}}$  mit

$$D^\mu = \partial^\mu + \frac{i}{\sqrt{2}} g (\tau_- W_+^\mu + \tau_+ W_-^\mu) + iq A^\mu + g_z Z^\mu + i \frac{i}{2} g_s (\lambda_1 G_1^\mu + \dots + \lambda_8 G_8^\mu)$$

## Ein Wort noch zu ...

- ... Supersymmetrie-Brechung:

Skalare und Gauginos erhalten Massen, wenn eines der Hilfsfelder einen nicht-verschwindenden Vakuum-Erwartungswert hat (Analogon im SM: Higgs-Mechanismus)

- ... Mischungen:

Die SUSY-Lagrange-Dichte enthält Terme, wie z.B.  $-g \frac{v_d}{\sqrt{s}} \lambda_B^\dagger \psi H_d^0$  (Bino-Higgsino-Vertex?), die keine physikalische Bedeutung haben. Durch Diagonalisierung von Mischungs-Matrizen gelangt man zu Termen, die nur noch Felder ins Quadrat enthalten. Diese Felder sind Überlagerungen der "alten" Felder. Links- und rechtshändige Sfermionen überlagern zu Eigenzuständen verschiedener Massen. Bino, neutrales wino und die neutralen Higgsinos überlagern zu den Neutralinos, geladene Winos und geladene Higgsinos zu den Charginos.

# Zusammenfassung

- In der supersymmetrischen Lagrange-Dichte kommen vier Arten von Feldern vor:
  - Fermion-Felder  $\psi$  (inkl. Higgsino-Felder)
  - Eichfelder  $A^\mu$
  - Skalare Felder  $\phi$
  - Gaugino-Felder  $\lambda$
- Kinetische Terme enthalten Vierergradienten der Felder
- Nach der Diagonalisierung von Mischungs-Matrizen sind mögliche Wechselwirkungen direkt ablesbar. Terme, die quadratisch in den Feldern sind, sind dabei Massenterme.

# Maxwell-Gleichungen im Vakuum ( $\epsilon_r = \mu_r = 1$ )<sup>2</sup>

Für  $\partial_\nu A^\nu = \frac{\partial}{\partial t} A^0 + \nabla \vec{A} = 0$  (Lorentz-Eichung):

$$\blacksquare A^0 = 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial t^2} A^0}_{= -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \vec{A}} - \nabla \nabla A^0 = 0 \Rightarrow \nabla \underbrace{\left( -\text{grad } A^0 - \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} \right)}_{\equiv \vec{E}} = 0$$

$$\Rightarrow \text{div } \vec{E} = 0$$

$$\blacksquare \text{rot } \vec{E} = - \underbrace{\text{rot grad } A^0}_{=0} - \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\text{rot } \vec{A}}_{\equiv \vec{B}} = 0 \Rightarrow \text{rot } \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0$$

$$\blacksquare \text{div rot } A = 0 \Rightarrow \text{div } B = 0$$

$$\blacksquare \square \vec{A} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} - \nabla \underbrace{\nabla \vec{A}}_{= -\frac{\partial}{\partial t} A^0} = 0 \Rightarrow -\frac{\partial}{\partial t} \vec{E} = 0 \quad (???)$$

<sup>2</sup>Ausserdem wird  $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$  gesetzt (Heavyside-Lorentz-Einheiten).