Diferansiyel Geometri

1

Giriş

"Aklın yolu birdir!"

Sadece pür matematikte.

"İki şey sonsuzdur, ..."
(A. Einstein)

matematikte yaklaşıklıkların yer almadığı kısmı ≑ saf aksiyomatik

örnek

lineer cebir

hesaplama

$\Downarrow$

reel bir sayı bulmak!
(bu imkansız !!!)

Matematik

π

Fizik

g - 2

Peki ya fizikte?
(Hilbert Problem ...)

global $\times$ lokal

örnek

Aksiyomatik QFT

$\mathbb{R}$ - analiz
$\mathbb{C}$ - analiz
$\mathbb{H}$ - analiz

Sonsuz küçüklerin hesabı
(Infinitesimal Calculus)

$\mathbb{C}(\mathbb{R})$

Gürsey (qft)

2

tam sıralamalı

QM

$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{O}$ $\longrightarrow$ Topoloji

	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{O}$
com.	✓	✓	×	×
assos.	✓	✓	✓	×
alt.	✓	✓	✓	✓

kare-kökü: $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}^\wedge$, ?

inv. : $Id_{\mathbb{R}}$; $Id_{\mathbb{C}(\mathbb{R})}$, * ; $Id_{\mathbb{H}(\mathbb{R})}$, $\bar{\ }$, $\hat{\ }$; ?

$\dim_{\mathbb{R}}$

1 , 2 , 4 , 8

$\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O} \longrightarrow \mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^4, \mathbb{R}^8$

Vektör demetleri & K-teorisi

düğümler

pür quaternionlar $\longrightarrow$ $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^7$ S^0 , S^1 , S^3 , S^7

$\sqcup \{\infty\}$

Stereografik projeksiyon

"x" başka da yok! (Massey)

③

$\mathbb{R}^3$'te vektör hesabı !!!

$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$\mathbb{R}$-analiz $\Updownarrow$

IC (inf. calc.)

cebirsel ✓✗
sıralama ✗
topolojisi ✓

lineer uzay + "×" çarpımı } lineer cebir

$+ \; g_{Euc.} = \langle \, , \, \rangle = \cdot$

VC (vec. calc.)

lokal {
grad : $\vec{\nabla} f$
rot : $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ $(n=3)$
div : $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$
Laplace-yen : $\vec{\nabla}^2 f$

$(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) f = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f)$

(4)

(i) Gauss - Ostragradski formülü :

$$\overbrace{\int_V (\operatorname{div} \vec{A})\, dv = \int_S \vec{A} \cdot d\vec{\sigma}}^{\text{akı (flux)}}$$

$\mathbb{R}^3$'te kapalı ve sınırlı $\longrightarrow V$

$$S = \partial V$$

(ii) Stokes formülü :
($n = 3$)

$$\int_{S'} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{\sigma}' = \underbrace{\int_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell}}_{\text{dolanım (circulation)}}$$

$$C = \partial S'$$

$\rho \longrightarrow$ sürekli ortamlar mekaniği felsefesi

$$S \neq S' \Leftarrow \partial^2 = 0$$

"Wheeler"

——— o ———

Örnekler

Maxwell e.m.

Akışkanlar(ın) (Newtonsal) Mekaniği

Newtonsal
akışkanlar
Newtonsal Olmayan

5

Purcell, 1st ed. App. A with a mistake ;)

SI — Gauss

Maxwell em. :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 4\pi\rho$$

mem. paradig & tubes

ödev

mag. monopoles

lokal

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Dirac
Born-Infeld
Bopp-Podolsky

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \left(\Rightarrow \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \right)$$

$\mathbb{R}^3$

(Gratus et.al.)

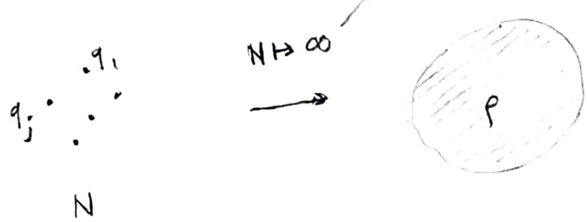
(Yükler üzerinde $\vec{E}, \vec{B}$ tanımlı olmadığı için çoklu bağlantılı $\mathbb{R}^3$ görüşü hâlen anlamlı!)

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\vec{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \frac{1}{c}\left(4\pi \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$(i) \Rightarrow \int_S \vec{E} \cdot d\vec{\sigma} = Q(V)/\epsilon_0$$

global

$\alpha = 2^{\aleph_0}$ (Hilbert...)



(Newton mekaniğindeki bir katı cisim, sıvı, ...)

Akışkanlar(ın)
(Newtonsal) mekaniği :

su akışı

gerçeğe uygun
olmayan kısıtlamalar

kuru su
(J. von Neumann)

sıkıştırılamaz, ağdasız, dolanımsız sıvı modeli

$\rho = \text{sbt}$

maddenin korunumu

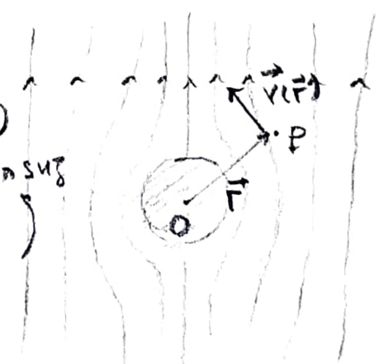
$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t)$

gözlemciler alanı !

$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$ durağan akış (steady flow) $\Longrightarrow$ elektrostatik ile benzeşim

$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ (sıkıştırılamazlık)

$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{0}$ (sirkülasyonsuz olma)



dönel olmayan bir sıvının küresel engel durumundaki akışı

dolanımsız
girdapsız
türbülanssız

e.o.s

$f(P, V, T) = 0$

Landau , Whitney

all works

$(\mathbb{R}^3, \times, \cdot)$

$\otimes$ $\equiv \wedge$

GIT

p. 11

EMS

differential form
version of
Euler's & Navier-Stokes' ⟶ Fraenkel
eq.s ?

Landau "Fluids"

Euler , Lagrange p.o.v.

"material der." ⟷ ∇

Kelvin's vortex atoms

J.J. Thomson's memoir

Circulation theorem

1880

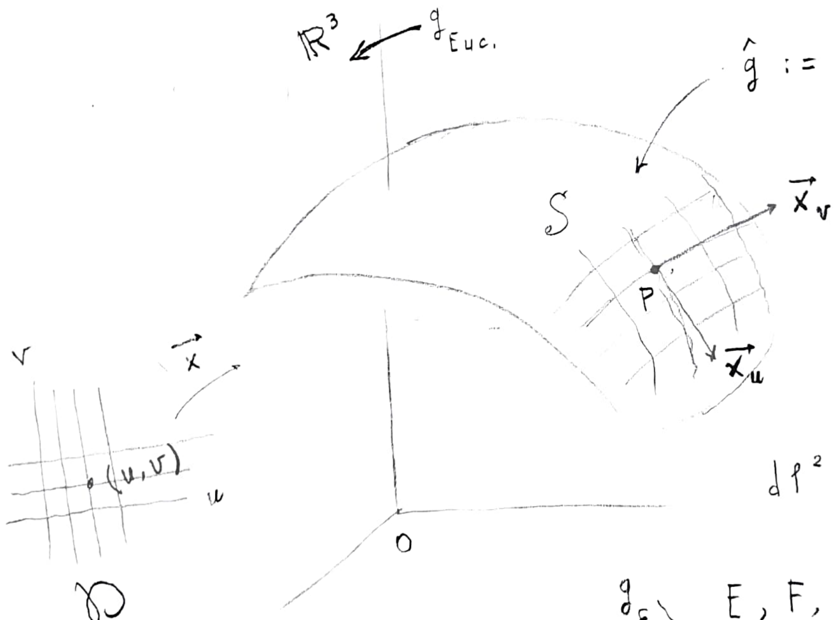
Vektör hesabı J. W. GIBBS ve O. HEAVISIDE tarafından bulundu, ve bu kuaternionlardan esinlenilerek oluşturuldu. J. C. MAXWELL'de meşhur yapıtında bu cebirleri kullandı.

1873

1827

C. F. GAUSS'ın Theorema Egregium'undan sonra kendi ismi ile anılan geometriyi öğrencisi G. B. RIEMANN keşfetti.

1854



$$\hat{g} := g_{Euc.}\big|_S$$

$$\overrightarrow{OP} = \vec{x}(u,v)$$

$$d\ell^2 = E(du)^2 + 2F\,du\,dv + G(dv)^2$$

g_E

$$E, F, G : S \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

$$E(u,v) = \vec{x}_u \cdot \vec{x}_u = \vec{x}_u \,\hat{\cdot}\, \vec{x}_v$$

$$F(u,v) = \vec{x}_u \cdot \vec{x}_v$$

$\hat{g}$

$$G(u,v) = \vec{x}_v \cdot \vec{x}_v$$

Appendix

9

$$dh^2 = L(u,v)(du)^2 + 2M(u,v)\,du\,dv + N(u,v)(dv)^2$$

g

$$L = \vec{n} \cdot \vec{x}_{uu}$$

$$M = \vec{n} \cdot \vec{x}_{uv} = -\vec{n}_u \cdot \vec{x}_v$$

$$N = \vec{n} \cdot \vec{x}_{vv}$$

$$K(u,v) = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{2EG}\left[(E_{vv} + G_{uu}) - \frac{1}{2}\left(\frac{E_u G_u + E_v^2}{E} + \frac{E_v G_v + G_u^2}{G}\right)\right]$$

Not: $\vec{n} = \dfrac{\vec{x}_u \times \vec{x}_v}{\| \vec{x}_u \times \vec{x}_v \|_{g_E}}$

Ancak Gauss? :)

Hatayı bul!

10)

$$\int_{V_1 \times V_2} \cdots = \int_{\partial (V_1 \times V_2)} \cdots$$

$S^2 \overset{\text{homeo.}}{\approx} \mathcal{S}$

τ_2

$$\partial (V_1 \times V_2) = (\partial V_1 \times \overline{V}_2) \cup (\overline{V}_1 \times \partial V_2)$$

Genel Topoloji

$$V_i \leftarrow \tau_i \quad , \quad V_1 \times V_2 \leftarrow \tau \leftarrow \tau_i$$

çarpım topolojisi
(Tychonov top.)

— ∘ —

Cebirsel Topoloji
(homoloji)

X, Y — Euclides-sel (rectilinear) kompakt bağlantılı hücre kompleksleri

$$A \in T(X) \quad , \quad B \in T(Y)$$

A: k-hücre, B: (p-k)-hücre

$$\partial_p \longrightarrow T(X \times Y)$$

$$\partial_p (A \times B) = \partial_k A \times B + (-1)^k A \times \partial_{p-k} B$$

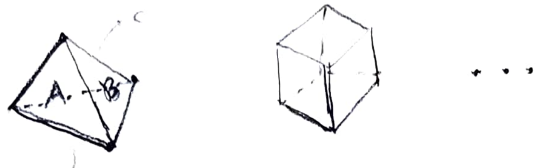
$\vdots$

$$\chi(X \times Y) = \chi(X)\,\chi(Y)$$

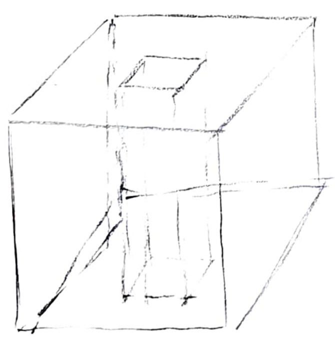
Örnek : $\mathbb{R}^3$'teki bir P düzgün çok-yüzlüsü için Euler karakteristiği

$$\chi(P) = v - e + f = 2$$

olmaktadır.



$$P \longleftrightarrow T \; , \; \Gamma = T^*$$



?

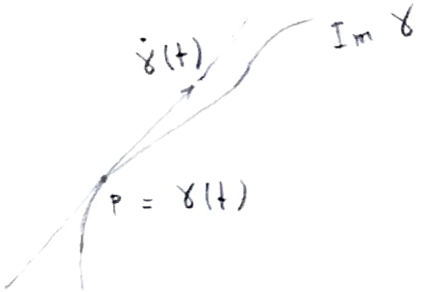
$$\chi(\square \times I) = \chi(\square) = 8 - 12 + 4$$

$\chi = 2 - 2g$ (closed) $\to$ compact without boundary

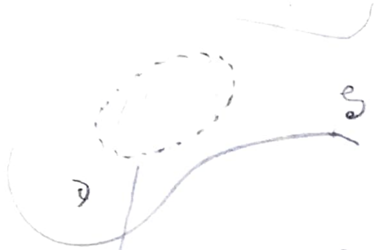
$\chi = 2 - 2g - b$ (surfaces with b boundary components)

a cube with a hole inside

Klasik Dif. Geo. — $\mathbb{R}^3$



$T_p \,\mathrm{Im}\,\gamma$



$U \subseteq S \subseteq \mathbb{R}^3$

kompakt $\Rightarrow A(U)$

d

$\int$

Roberval

Cavallieri

Fermat

Newton — 1686

Leibnitz

$S \subseteq \mathbb{R}^3$

yüzeyler teorisi (Euler 1783, Mongé 1818)

(13)

Gauss 1827

Riemann 1854

Einstein 1915

"On the hypotheses which lie at the bases of geometry"

Clifford 1873

?

On the space-theory of matter

1876

J. A. Wheeler

A. Sakharov → E. Verlinde

Form problemi : Iki Riemann-sal metrik hangi durumda sadece koordinat değişimi kadar farklıdırlar?

1870

E. B. Christoffel

R. Lipschitz

"kovaryant türev"

Tensör analizi

G. Ricci

T. Levi-Civita

1913 "spinör" Cartan

(14)

Gauss'un ve Riemann'ın geometrisinde saklı olan manifold kavramı ilk olarak H. Weyl tarafından 1912'de ortaya çıkarıldı, ancak bugün ki hali H. Whitney tarafından 1936'da verildi. Diferansiyel topoloji ve diferansiyel geometrinin temel nesneleri diferansiyellenebilir manifoldlardır.

manifoldlar / geometrikleştirilebilir olanlar

$\mathbb{R}^3$ ve $\mathbb{R}^3$'teki eğri ve yüzeyler

$Q_c(N, \mathbb{R}^3) \underset{c_2}{\subseteq} \mathbb{R}^{3N-c_1}$

$\mathcal{P}_c(N, \mathbb{R}^3) \underset{c_2}{\subseteq} \mathbb{R}^{2(3N-c_1)}$

$\mathbb{R}^3$, S^3, H^3

$\mathbb{R}\times S^2$, $\mathbb{R}\times H^2$

Nil

Sol

$SL(2,\mathbb{R})$

$\mathbb{R}^3$'teki parçacık sistemlerinin şekillenim uzayları

faz uzayları

Görelilikteki uzayzaman

Riemann Yüzeyleri

ilk soyut manifoldlar (Weyl 1912)

Fonksiyonlar teorisindeki seviye kümeleri

enerji, basınç, ... yüzeyleri

Cebirdeki Lie grupları

Cebirsel Varyeteler

Projektif uzaylar

⋮

M bir parakompakt Hausdorff topolojik uzayı olsun. Ona n-boyutlu topolojik manifold denir eğer lokal olarak "euclides-sel" ise; yani $\mathbb{R}^n$'nin bir açığına homeomorfik ise.

sadece topolojik yapısı mevzu bahis

$\exists$ $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in \Lambda}$, M'nin bir açık örtüsü öyle ki

$$\varphi_i : U_i \subseteq M \longrightarrow V_i \subseteq \mathbb{R}^n$$

bir homeomorfizmdir.

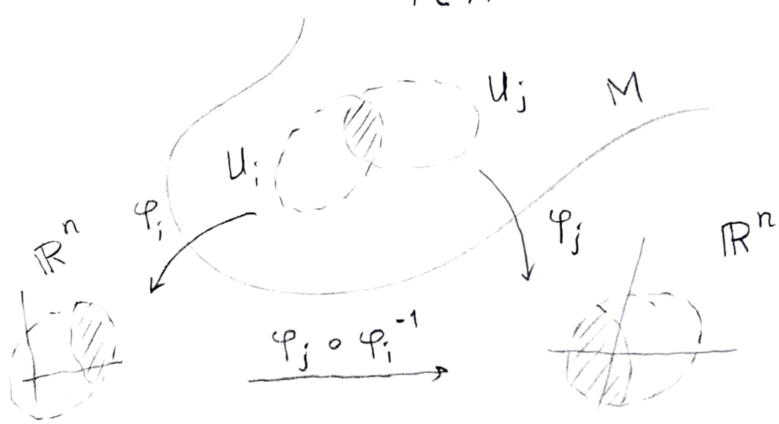
(U_i, φ_i) ikilisine $\forall i$ için bir pafta ya da yerel koordinat sistemi denir.

φ_i : pafta gönderimi

$$U_i = \mathrm{dom}(\varphi_i) \underset{\text{op.}}{\subseteq} M$$

$$\varphi_i(U_i) = V_i = \mathrm{im}(\varphi_i) \underset{\text{op.}}{\subseteq} \mathbb{R}^n$$

$\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in \Lambda} \longrightarrow$ M için bir atlas



φ_i^{-1}'ye M'nin bir yerel parametrelendirmesi denir.

(16)

iki pafta (U_i, φ_i) ve (U_j, φ_j)'nin C^r örtüşmesine sahip oldukları söylenir
(overlap)

eğer

$\mathbb{R}^n$ — Inf. Calc.

$$\varphi_j \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

koordinat değişimi r. mertebeden diferansiyellene-
(dönüşümü)

bilir ise (ve $\varphi_i \varphi_j^{-1}$ için de!)

M üzerindeki $\mathcal{A}$ atlası C^r'dir denir, eğer her bir pafta çifti C^r örtüşmesine sahip ise. Bu durumda $\mathcal{A}$'yı içeren tek bir maksimal atlas (C^r) α vardır; öyle ki, $\mathcal{A}$'ya eklenen her (U, φ) paftası $\mathcal{A}$'daki (U_i, φ_i) paftalarıyla C^r örtüşmesine sahiptir. Bu hâlde (U, φ) paftasının $\mathcal{A}$ atlası ile uyumlu olduğu söylenir:

$$\alpha = \left(\{ (U, \varphi) \} \cup \mathcal{A} \right)$$

$\mathcal{A}$-uyumlu

M üzerindeki maksimal C^r atlasına bir C^r dif. yapı ve (M, α) ya C^r sınıfından bir manifold denir.

$\mathcal{A}$ atlasının her bir üyesi başka bir $\mathcal{A}'$ atlası ile uyumlu ise bu iki atlas uyumludur denir: $\mathcal{A} \sim \mathcal{A}'$

$r \in \mathbb{N}$

∞

ω

$$\{ [\mathcal{A}], [\mathcal{B}], \ldots \}$$

α , β

$r \geq 1$ ise manifolda pürüzsüz denir.

M için farklı differansiyel yapılar.

(17)

Egzotik $\mathbb{R}^4$ ve S^7'ler ! $\xrightarrow{\text{fizik}}$ C. Brans

Akbulut — Milnor & Kervaire

$$h_{ij} := \varphi_j \varphi_i^{-1} := \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$$

(i) $h_{ii} = Id\big|_{U_i}$

$$\underbrace{h_{k\ell} \circ h_{jk}}_{h_{j\ell}} \circ h_{ij} = \underbrace{h_{k\ell} \circ h_{ik}}_{h_{i\ell}}$$

(ii) $h_{jk} \circ h_{ij} = h_{ik}$

(iii) $h_{ij}^{-1} = h_{ji}$

(iv) $\circ$ assosyatif bir ikili işlem !

$$\{h_{ij}\} \leq \mathrm{Diff}(\mathbb{R}^n)$$

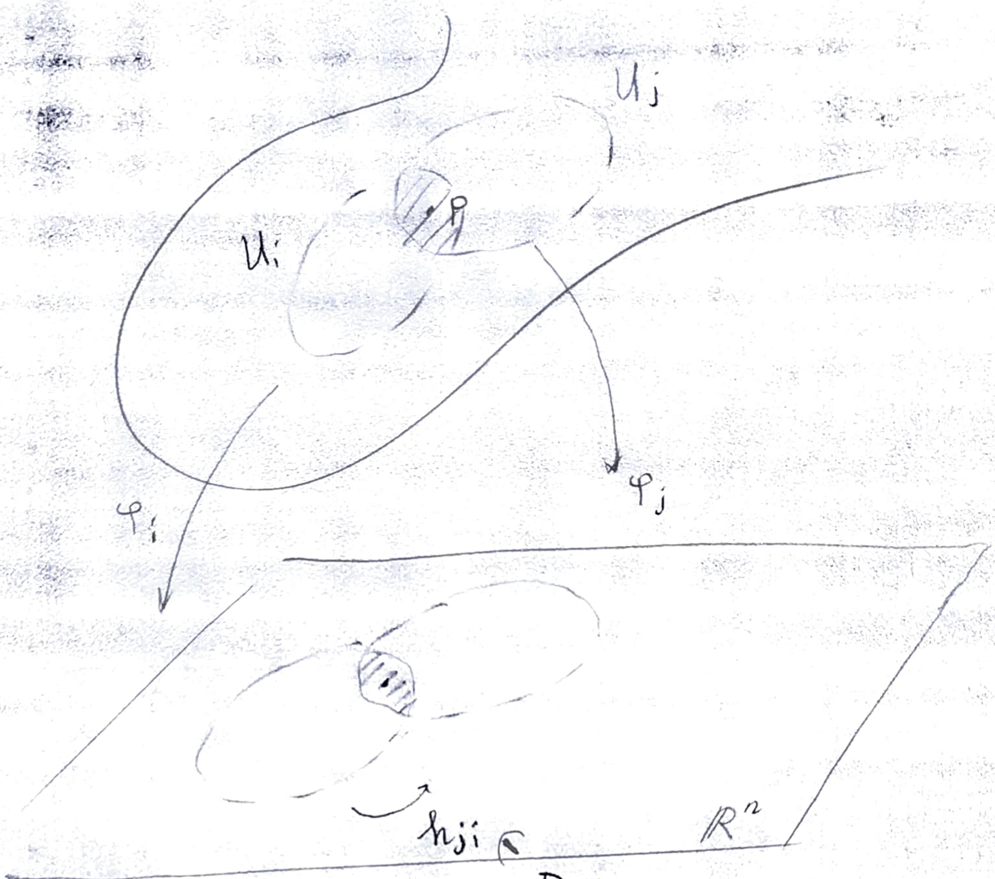
$$i, j \in \Lambda$$

pozitif diffeolar (çünkü bunlar koordinat dönüşümleri)

$T_P h_{ij}$ (h_{ij}'ye P noktasında 1. mertebeden yaklaştırım)

$(h_{ij})_{*P}$ teğet gönderimine karşılık gelen matrisin determinantı $\forall i, j \in \Lambda$ ve $\forall P \in \varphi_i(U_i \cap U_j)$ için aynı işaretli ise M'nin bir yönelim kabul ettiği (yönlendirilebilir olduğu) söylenir.

$+, -$ (topolojik bir özellik $\Leftrightarrow$ Karakteristik sınıflar)



$\mathrm{Diff}_{pos.}(\mathbb{R}^n)$

$n = 2$ $\quad \mathrm{Diff}(\mathbb{R}^2)$

wild diffeo.s

~~4~~ $n < 5$ low dim. topology

(garden variety)

$$\begin{array}{ccccc} & \nearrow^{\varphi} \mathbb{R}^m & & \nearrow^{\psi} \mathbb{R}^n \\ f: M & \longrightarrow & N & \end{array}$$

f, p noktasında dif. bilirdir eğer

$\underbrace{\psi \circ f \circ \varphi^{-1}}_{\substack{f'\text{nin pafta (koordinat)} \\ \text{temsili}}}$, $\varphi(p)$ noktasında dif. bilir ise!

(koordinat) → lokal

Koordinat dönüşümleri dif. bilir olduğundan, f'nin dif. bilirliği pafta (koordinat) seçiminden bağımsızdır! Differensiyel geometrik ve dif. topolojik nicelikler bu anlamda iyi-tanımlı olmalıdırlar.

$N = \mathbb{R}$ ve $\mathrm{dom}(f) = W \underset{op.}{\subseteq} M$ ise

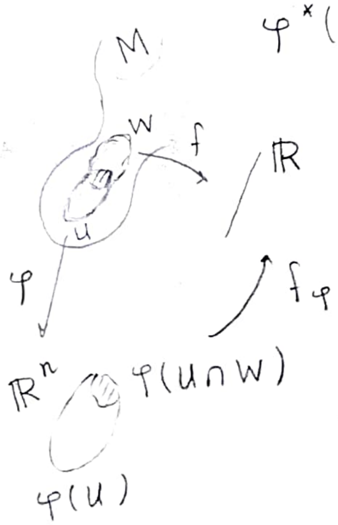
$U \cap W \neq \emptyset$ o.ü. (U, φ) paftasında

$$f_\varphi : \varphi(U \cap W) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f_\varphi := f \circ \varphi^{-1}$$

ile tanımlanır. φ^* gönderimi de

$$\begin{aligned} \varphi^*(f_\varphi) = f_\varphi \circ \varphi &= (f \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi \\ &= f \circ (\varphi^{-1} \circ \varphi) \\ &= f \circ Id_{U \cap W} \\ &= f\big|_{U \cap W} \\ &:= \text{"}f\text{"} \end{aligned}$$



φ^*, f_φ'yi $\varphi(U \cap W)$'dan $U \cap W$ geri çekiyor denir.

(19)

$$\psi : M \longrightarrow N$$

$$f : N \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "\psi^*(f)"'] & N \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"] & W \arrow[dl, "g"] \\
& \mathbb{R} &
\end{tikzcd}$$

$$(\varphi \circ \psi)^*(g)(m) = \big(g \circ (\varphi \circ \psi)\big)(\overset{\in M}{m})$$

$$= (g \circ \varphi)(\psi(m))$$

$$= (\varphi^*(g))(\psi(m))$$

$$= \big((\varphi^*g) \circ \psi\big)(m)$$

$$= \big(\psi^*(\varphi^*(g))\big)(m) \qquad \forall m$$

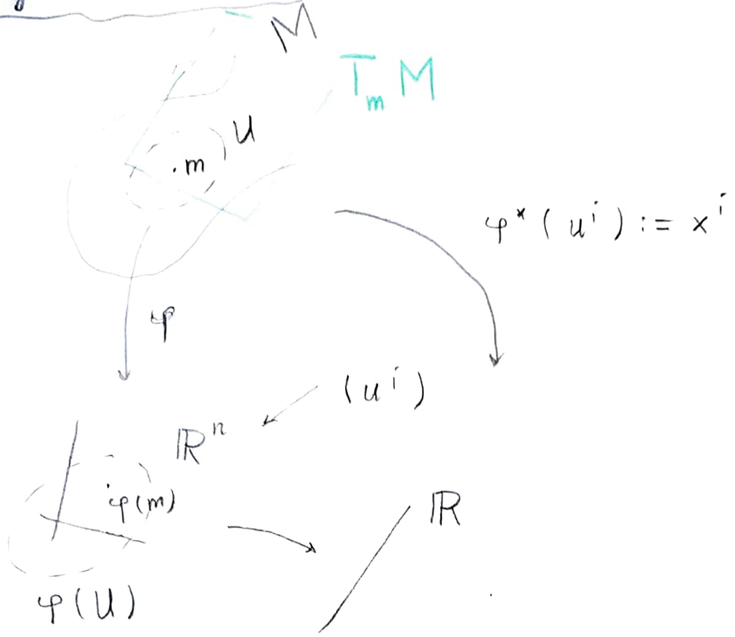
$$(\varphi \circ \psi)^*(g) = \psi^*(\varphi^*(g))$$

$$= (\psi^* \circ \varphi^*)(g) \qquad \forall g$$

$$\boxed{(\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^*}$$

$\frac{10000}{0.0\phi 827}$

(20) Teğet Vektörler



$T_m M$, $\forall m$ için $n = \dim_{\mathbb{R}} M$ boyutlu bir $\mathbb{R}$-çizgisel uzaydır.

$$\{(e_i)_m\} \longleftrightarrow \left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_m\right\}$$

lineer cebirsel anlamda geometrik vektörler

analitik vektörler = türevler

$$X_m = a^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_m \quad ; \quad f \in C^\infty(M, \mathbb{R}) := \mathcal{F}(M)$$

$$X_m f = X_m(\varphi^* f_\varphi) := (\varphi_{*m}(X_m))(f_\varphi) \in \mathbb{R}$$

$$\varphi_{*m} : T_m M \longrightarrow T_{\varphi(m)} \mathbb{R}^n$$

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_{\varphi(m)}\right\}$$

21

$$\varphi_{*m}\left(a^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_m\right) = a^i\,\varphi_{*m}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_m\right)$$

$$\varphi_{*m}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_m\right)(u^k) = b_i^{\,j}\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right)_{\varphi(m)}(u^k)$$

$\{u^k\}$, $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ için bir polinom bazıdır ?

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_m \big(\underbrace{\varphi^*(u^k)}_{=x^k}\big) = \underbrace{b_i^{\,j}\underbrace{\left(\frac{\partial u^k}{\partial u^j}\right)_{\varphi(m)}}_{\delta_j^{\,k}}}_{=\delta_j^{\,k}}$$

$$\underbrace{\underbrace{\left(\frac{\partial x^k}{\partial x^i}\right)_m}_{\delta_i^{\,k}}}_{\delta_i^{\,k}} = b_i^{\,k}$$

$$\Rightarrow \varphi_{*m}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_m\right) = \delta_i^{\,j}\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right)_{\varphi(m)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi_{*m}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_m\right) = \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_{\varphi(m)} = \left(\frac{\partial}{\partial((\varphi^{-1})^* x^i)}\right)_{\varphi(m)}}$$

$\mathcal{F}(M)$: M manifoldu üzerindeki pürüzsüz fonksiyonların kümesi

$+ , \cdot$

$$(f+g)(m) = f(m) + g(m)$$

$$(f \cdot g)(m) = f(m)\, g(m)$$

∞ boyutlu

$\mathcal{F}(M)$ bir komütatif halkadır.

Sabit fonksiyonlar ile $\mathbb{R}$'yi özdeşleştirirsek $\mathcal{F}(M)$ bir reel vektör uzayı ve dolayısı ile bir reel assosyatif cebir olarak ele alınabilir

$$X_m \in T_m M$$

$$X_m(f \cdot g) = (X_m f)\, g(m) + f(m)\,(X_m g)$$

$$\Psi : M \longrightarrow N$$

$$\Psi_{*m} \quad T_m M \longrightarrow T_{f(m)} N$$

ileri itme gönderimi

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\Psi"] \arrow[rr, bend right, "(\varphi \circ \Psi)_*"'] & N \arrow[r, "\varphi"] & W \end{tikzcd}$$

$$\boxed{(\varphi \circ \Psi)_* = \varphi_* \circ \Psi_*}$$

23

Vektör Alanları

$$X : M \longrightarrow T_m M$$
$$m \longmapsto X_m = X|_m$$

ayrıca bir pürüzsüz vektör alanı pürüzsüz fonksiyonların cebri üzerinde bir türevdir.

$$X : \mathcal{F}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M)$$

$$X(\lambda f + \mu g) = \lambda X(f) + \mu X(g)$$
$$X(f \cdot g) = X(f)\, g + f\, X(g)$$

$T_1(M)$: M üzerindeki pürüzsüz vektör alanlarının kümesi

$\mathcal{X}(M)$

$$(Xf)_m = X_m f$$

$$XY : \mathcal{F}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M)$$
$$f \longmapsto X(Y(f))$$

assosyatif bir çarpım

ancak $XY \notin T_1(M)$

$$[\ ,\ ] : T_1(M) \times T_1(M) \longrightarrow T_1(M)$$

assosyatif bir çarpımın komütatörü

$\Rightarrow$ (i) anti-simetrik

(ii) Jacobi özdeşliği

$$[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$$

(24)

$T_1(M)$; $\mathcal{F}(M)$ halkası üzerinde bir modüldür.

Sabit fonksiyonlar üzerinde bir ($\cong \mathbb{R}$) vektör uzayıdır ve $[\ ,\ ]$ işlemi ile de ∞ boyutlu bir Lie cebridir. Böyle bir komütatöre, Lie parantezi de denir.

$U = \mathrm{dom}(\varphi)$

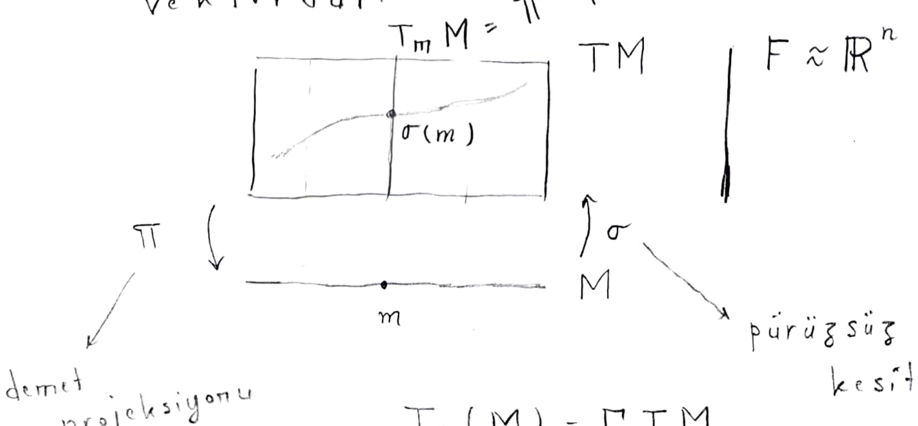
$\mathcal{F}$-modül $T_1(U)$ için $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}$'ye doğal yerel baz / yerel **koordinat** bazı denir.

$U = M$ için genellikle bir modül bazı mevcut değildir.

Teğet Demet : M bir n-manifold olsun,

$$TM := \bigsqcup_m T_m M$$

ile tanımlanan yapı bir $2n$-manifold olup; onun her bir elemanı bir m noktası ile etiketlenen bir teğet vektördür.



$\pi : TM \to M$

$\sigma : M \to TM$

$\pi \circ \sigma = Id_M$

$T_1(M) = \Gamma TM$

Diferansiyel 1-formlar

Bir 1-form alanı $T_1(M)$'e dual olan modülün elemanıdır; yani vektör alanları üzerinde $\mathcal{F}(M)$-değerli $\mathcal{F}(M)$-çizgisel bir gönderimdir. Bu küme $T^1(M)$ ile gösterilir.

$$\omega \in T^1(M)\ ;\ f, g \in \mathcal{F}(M) \text{ ve } X, Y \in T_1(M)$$

ise

$$\omega(fX + gY) = f\cdot\omega(X) + g\cdot\omega(Y)$$

ve

$$(\omega(X))(m) = \omega_m(X_m) \in \mathbb{R}$$

yani $\omega_m : T_m M \longrightarrow \mathbb{R}$ olan bir $\mathbb{R}$-çizgisel gönderimdir. $\omega_m \in (T_m M)^* = T_m^* M$

$$\underbrace{T^* M}_{\substack{2n\text{-manifold} \\ \text{(koteğet demet)}}} = \bigsqcup_m T_m^* M$$

n

vektör demeti

$$T_1(M) = \Gamma T^* M$$

$$f \in \mathcal{F}(M) \Rightarrow df \in T^1(M)$$

$$X(f) = df(X) \quad \forall X \in T_1(M)$$

$T^1(U)$ için doğal lokal baz $\{dx^i\}$ ile verilir:

$$dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta^i_j$$

$f \in \mathcal{F}(M)$ ise

$$df = df\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) dx^i$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x^i} \underbrace{dx^i}$$

koordinatların sonsuz küçük değişimi değiller!

$$f : M \longrightarrow N$$

$$(f^* \omega)_m X_m = \omega_{f(m)} (f_{*m} X_m)$$

ve

$g \in \mathcal{F}(N)$ iken

$$f^*(g\,\omega) = (f^* g)(f^* \omega)$$

Ricci — Cartan

Tensör ve Form alanları

M, n-manifoldunun m noktasında kontravaryant ve kovaryant derecesi sırasıyla s ve r olan tensörlerin uzayı

$$T^r_s(T_m M) = T^s_r(T^*_m M)$$

ile gösterilir.

$\dim_{\mathbb{R}}$

$$n^{r+s}$$

tensör çarpım modülü

$$\underbrace{\otimes^r T^1(M)}_{\text{1. form alanlarının}} \otimes^s \underbrace{T_1(M)}_{\text{pürüzsüz v.a.'nın}} = T^r_s(M)$$

$\mathcal{F}$ - modülü

dual

$$T^0_0(M) = \mathcal{F}(M)$$

$$T^r_s M = \bigsqcup_m T^r_s(T_m M)$$

$$T^r_s(M) = \Gamma\, T^r_s M$$

(U, φ) paftasında $x^i = \varphi^* u^i$ koordinat fonksiyonları ise $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ ve $\{dx^i\}$ sırasıyla $T^1(U)$ ve $T_1(U)$, $\mathcal{F}$ - modülleri için yerel bazlardır ve $T \in T^r_s(M)$ tensör alanı lokal olarak

$$T = T_{i_1 \dots i_r}^{\;j_1 \dots j_s}\, dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_r} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_s}}$$

lokal koordinat bazı her zaman en uygun olanı değildir

(28)

$T^r_s(M)$ 'in tamamen anti-simetrik kovaryant tensor alanlarının oluşturduğu alt-modül $\Lambda^r(M)$ 'dir.

dif. form alanlarının dış cebri

$$\Lambda(M) = \bigoplus_{r=0}^{n} \Lambda^r(M)$$

$$\Lambda^r(M)\Big|_m = \Lambda^r(T_m M) = \Lambda_r(T^*_m M)$$

$\binom{n}{r}$

$$\Lambda(M)\Big|_m = \Lambda(T_m M)$$

2^n

$$\Lambda_0(M) = \mathcal{F}(M)$$

$$\Lambda M = \bigsqcup_m \Lambda(T_m M)$$

dış demet

$$\Gamma \Lambda M = \Lambda(M)$$

$\beta \in \Gamma \Lambda^r M$,

$$\beta = \frac{1}{r!} \beta_{i_1 \dots i_r}(x)\, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$$

29

$\varphi : M \longrightarrow N$ difeo.

$\Rightarrow \quad \hat{\varphi} \; ; \; T^r_s(M) \longrightarrow T^r_s(N)$

$\hat{\varphi}(\omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^r \otimes X_1 \otimes \dots \otimes X_s)$

$= (\varphi^{-1*}\omega^1 \otimes \dots \otimes \varphi^{-1*}\omega^r \otimes \varphi_* X_1 \otimes \dots \otimes \varphi_* X_s)$

$\omega^i \in T^1(M) \; ; \; 1 \leq i \leq r$

$X_j \in T_1(M) \; ; \; 1 \leq j \leq s$

$(Y_1, \dots, Y_r, \alpha^1, \dots, \alpha^s)$

$Y_i \in T_1(N)$

$\beta^j \in T^1(N)$

$= (\omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^r \otimes X_1 \otimes \dots \otimes X_s)(\varphi^{-1}_* Y_1, \dots, \varphi^{-1}_* Y_r,$

$\varphi^* \alpha^1, \dots, \varphi^* \alpha^s)$

Ödev: $\quad \alpha \in T^1(M) = \Gamma \Lambda^1 M \;, \; X \in T_1(M) = \Gamma TM$

$= \Gamma T^* M$

difeo.

$\varphi : M \longrightarrow N$

$(\hat{\varphi}\alpha)(\hat{\varphi}X) = \hat{\varphi}(\alpha(X))$

(30)

$$\hat{\varphi}\,\alpha = \varphi^{-1\,*}\,\alpha$$

$$\hat{\varphi}\,X = \varphi_*\,X$$

5 dev

$$\hat{\varphi}\alpha(\hat{\varphi}X)(q) = \left((\varphi^{-1\,*}\alpha)(\varphi_* X)\right)(q)$$

$$= \alpha\big(\underbrace{(\varphi^{-1}{}_* \circ \varphi_*)}_{(\underbrace{\varphi^{-1}\circ\varphi}_{Id_M})_* \,=\, Id_{T^1(M)}}(X)\big)\,(\varphi^{-1}(q))$$

$$= (\alpha(X))(\varphi^{-1}(q))$$

$$= \left(\varphi^{-1\,*}(\alpha(X))\right)(q)$$

$$= \hat{\varphi}(\alpha(X))(q) \qquad \forall q \in N$$

31

Elié CARTAN

Dış Türev (Cartan Türevi)

$$d_p : \Gamma \Lambda_p M \longrightarrow \Gamma \Lambda_{p+1} M$$

$f \in \mathcal{F}(M)$, $X \in \Gamma TM$

1. $df(X) = X(f)$

$\alpha \in \Gamma \Lambda^r M$, $\beta \in \Gamma \Lambda M$

2. $$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + \underbrace{\eta(\alpha)}_{:= (-1)^{\deg(\alpha)} \cdot \alpha \;=\; (-1)^r \alpha} \wedge d\beta$$

3. $d_{p+1} \circ d_p = dd = d^2 = 0$ (Poincaré Lemma)

indüksiyon

$\Rightarrow$

$$(d\alpha)(X_0, X_1, \ldots, X_r)$$

$$= \frac{1}{r+1} \left\{ \sum_{j=0}^{r} (-1)^j X_j(\alpha(X_0, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, X_r)) \right.$$

$$+ \sum_{0 \leq j < k \leq r} (-1)^{j+k} \alpha([X_j, X_k], \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, \widehat{X_k}, \ldots)$$

0

dif. bilir

$$\varphi : M \longrightarrow N$$

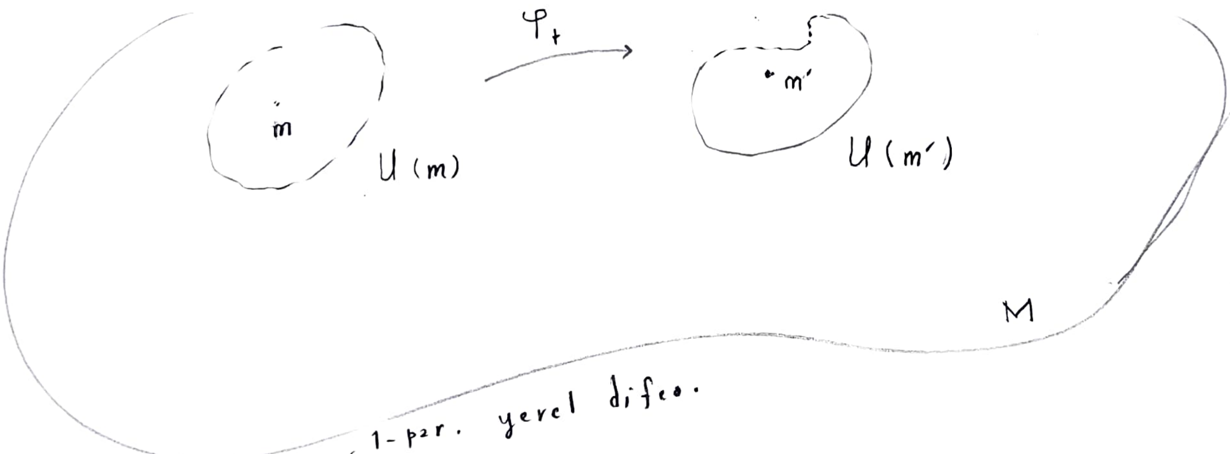
$$\varphi^* : \Gamma \Lambda N \longrightarrow \Gamma \Lambda M$$

$$\boxed{\varphi^* \circ d = d \circ \varphi^*}$$

$g \, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \in \Gamma \Lambda^r N$ dec.

1- parametreli difeomorfizmler ve integral eğrileri

laminar akış



1-par. yerel difeo.

$$\varphi_t : U(m) \longrightarrow U(m')$$

$$t \in I_m \underset{op.}{\subseteq} \mathbb{R}$$

$$\varphi : W \subseteq (I \times M) \longrightarrow M$$

$$(t, m) \longmapsto \varphi_t(m) \; ; \; \forall t \in I \supseteq I_m$$

$$\varphi_{t_2} \circ \varphi_{t_1} = \varphi_{t_1 + t_2} \; ; \; \forall t_1, t_2, t_1 + t_2 \in I$$

$$\varphi_0(m) = m \quad \forall m \in M \quad (\Rightarrow 0 \in I_m \subseteq I)$$

$$\Rightarrow \varphi_t^{-1} = \varphi_{-t} \Rightarrow (t \in I \Leftrightarrow -t \in I)$$

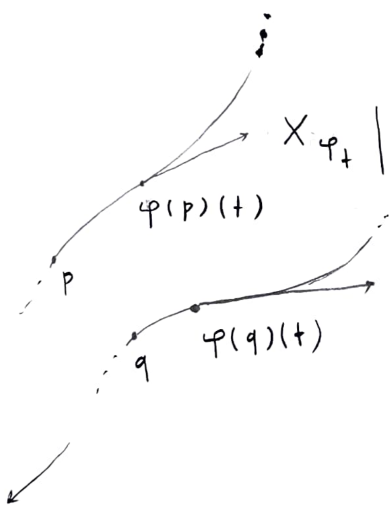
(33)

$$\varphi_t \longrightarrow X_{\varphi_t}\Big|_{\varphi(p)(t)} = \dot{\varphi}(p)(t)$$

$$\varphi_t \Longrightarrow \varphi \Rightarrow \varphi(p) \quad \forall p \in M, \; t \in I_p$$

$$\varphi(p) : I_p \longrightarrow M$$
$$t \longmapsto \varphi_t(p)$$

eğri



$$X_{\varphi_t}\Big|_{\varphi(p)(t)} = \dot{\varphi}(p)(t)$$

extension $\longleftrightarrow$ topology (global)

ODE (local) $\longrightarrow$ Cauchy global

X'in integral eğrileri

ya da

lokal φ_t difeo.'nin

akış çizgileri

φ_t çarpışmasızdır !

$$X \longrightarrow C_X : I \longrightarrow M \qquad (C_X)_{*t_0}\left(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t_0}\right) = X_{C(t_0)} \; ; \forall t_0 \in I$$

34

Lie Türevi

$T_1(M) \longleftrightarrow Der(\mathcal{F}(M))$

$$\begin{tikzcd} \varphi_t : M \arrow[rr] \arrow[dr, "\varphi_t^* f"'] & & M \arrow[dl, "f"] \\ & \mathbb{R} & \end{tikzcd}$$

$\varphi(m)$, $m \in M$'de başlayan X in integral eğrisi ise

$$(Xf)(m) = X_p(f) = \dot{\varphi}(m)(0)(f)$$

$$= \varphi(m)_* \left(\frac{d}{dt}\Big|_0 \right)(f)$$

$$= \left(\frac{d}{dt} (\varphi(m)^* f)(t) \right)_{t=0}$$

$$= \left(\frac{d}{dt} (f \circ \varphi(m))(t) \right)_0$$

$$= \left[\frac{d}{dt} \left(f(\varphi_t(m)) \right) \right]_0$$

$$= \lim_{t \to 0} t^{-1} \Big[\underbrace{f(\varphi_t(p))}_{\underbrace{(\varphi_t^* f)(p)}_{\varphi_{-t}^{-1\,*} f \,=\, \hat{\varphi}_{-t} f}} - f(\underbrace{\varphi_0(p)}_{=p}) \Big]$$

$\Rightarrow \quad T \in \Gamma T^s$

$$(\mathcal{L}_X T)(p) = \lim_{t \to 0} t^{-1} \left\{ (\hat{\varphi}_{-t} T)_p - T_p \right\}$$

anlat

A

35

$$\mathcal{L}_X f = X f$$

$$\mathcal{L}_X (S \otimes T) = \mathcal{L}_X S \otimes T + S \otimes \mathcal{L}_X T$$

tensör alanlarının cebri üzerinde bir türev $\forall X \in T_1(M)$; $\forall S, T \in Tens(M)$

$$Tens(M) = \bigoplus_{r,s=0}^{\infty} T^r_s(M)$$

$$\|$$

$$\Gamma \; Tens\, M$$

$$Tens\, M = \bigoplus_{r,s=0}^{\infty} T^r_s M$$

$$\mathcal{L}_X (T(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, X_1, \ldots, X_s)) = (\mathcal{L}_X T)(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, X_1, \ldots, X_s)$$

$$+ \sum_{k=1}^{r} T(\alpha_1, \ldots, \mathcal{L}_X \alpha_k, \ldots, \alpha_r, X_1, \ldots, X_s)$$

$$+ \sum_{k=1}^{s} T(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, X_1, \ldots, \mathcal{L}_X X_k, \ldots, X_s)$$

kontraksiyonlar ile sıra-değişme özelliği

ödev $\quad (\mathcal{L}_X Y)_p f = [X, Y]_p f \quad \forall f \in \mathcal{F}(M)$

$\forall p \in M$

36

$$[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] = \mathcal{L}_{[X,Y]}$$

$$[\mathcal{L}_X, d] = 0$$

$$[\underbrace{\mathcal{L}_X}_{\text{dif.}}, \underbrace{i_Y}_{\text{alg.}}] = \underbrace{i_{[X,Y]}}_{\text{alg.}}$$

$$\mathcal{L}_X\Big|_{\Lambda(M)} := d \circ i_X + i_X \, d$$

(H. Cartan)

$$(i_X\, w)_m := i_{X_m}\, w_m$$

$$(i_X\, w)(X_2, \dots, X_r) = r\, w(X, X_2, \dots, X_r)$$

$X \in T_1(M)$, $w \in \Lambda^r(M)$

$$[i_X, i_Y]_+ = 0 \Rightarrow i_X \circ i_X = (i_X)^2 = 0 \quad \forall X$$

indeks 2 nilpotent

$$d^2 = 0$$

37

Kobayashi & Nomizu connections

metrik tensör → conn X_a

↓

g , sem

→ p. 197

Bağlantılar

M , n-manifold

$$\nabla : \Gamma TM \times \Gamma TM \longrightarrow \Gamma TM$$

$$\forall f, g \in \mathcal{F}(M) \ , \ \forall X, Y, Z \in \Gamma TM$$

$$\nabla_{fX+gY} Z = f \nabla_X Z + g \nabla_Y Z$$

$$\nabla_X (fY + gZ) = X(f) Y + f \nabla_X Y + X(g) Z + g \nabla_X Z$$

yani ∇_X , $\forall X \in \Gamma TM$ için $\mathbb{R}$-çizgiseldir

ve X'e nazaran $\mathcal{F}$-çizgiseldir.

$$\nabla \Leftrightarrow \{\nabla_{X_a} X_b\} = \{\forall a, b \text{ için bileşenler}\}$$

n^2 vektör

ΓTM için lokal baz

$$\{X_a\}$$

$$\nabla_{X_a} X_b = \Gamma_{ab}{}^{c} X_c$$

n^3 bileşen = $\{X_a\}$ bazındaki bağlantı bileşenleri (katsayıları)

$$\omega^a{}_b = \Gamma_{cb}{}^{a} e^c \longrightarrow \text{bağlantı 1-formları}$$

$$e^a(X_b) = \delta^a{}_b$$

38

$$e = \{X_a\} \xrightarrow{A} e' = \{Y_b\}$$

$\in \mathcal{F}(M)$

Tens(M) is not a division algebra

$$A = A_c{}^d \; e^c \otimes X_d$$

hibrit

$A \in GL(n, \mathcal{F})$?

but ?

$\exists ! \; A^{-1}$

$$\text{"}A^{-1}\text{"} = A^{-1}$$

$$A^{-1} = A^{-1}{}_a{}^b \; e'^a \otimes Y_b$$

$$e'^a (Y_b) = \delta^a{}_b$$

$\Rightarrow$

$$A^{-1}{}_p{}^a \, A_a{}^b = \delta_p{}^b$$

$$e'^a = \underbrace{A^{-1}{}_p{}^a \; e^p}_{\text{ödev}}$$

$$\omega'^a{}_b = A_b{}^q \, \omega^r{}_q \, A^{-1}{}_r{}^a + \underbrace{A^{-1}{}_q{}^a \, dA_b{}^q}_{\text{inhomojen}}$$

$$= A^{-1}{}_q{}^a \Big[\big(\omega^q{}_r \, A_b{}^r + dA_b{}^q \big) - \omega^r{}_b \, A_r{}^q + \omega^r{}_b \, A_r{}^q \Big]$$

$$\omega'^a{}_b = A^{-1}{}_q{}^a \, DA_b{}^q + \omega^a{}_b$$

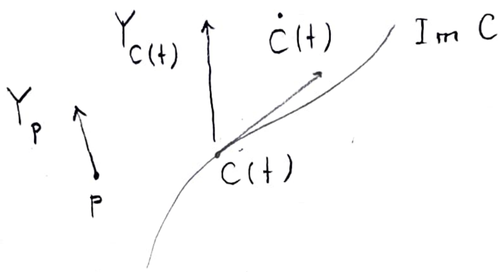
ödev

$$\nabla_{X_m} : \Gamma TM \longrightarrow T_m M \;,\; \forall X_m \in T_m M$$

— · —

$$C : I \underset{op.}{\subseteq} \mathbb{R} \longrightarrow M$$

$$t \longmapsto C(t)$$



$$\overbrace{Y \circ C}^{C^* Y} \longleftrightarrow Y\big|_{\operatorname{Im} C}$$

Y_C ve $\dot C$, C boyunca v.a.

(yani destekleri $\underset{1}{\operatorname{Im} C} \subseteq \underset{n}{M}$ olan v.a.)

literatür

$\Rightarrow$ $\nabla_{\dot C} Y$ 'de öyledir! $\equiv \dfrac{DY}{dt}$

C'yi parametrelendiriyor.

— · —

Bir C eğrisi ∇-otoparaleldir eğer $\dot C$ teğet v.a. C boyunca paralel ise.

pseudo-Riem. ∇-geodesik

$$\nabla_{\dot C} \dot C = 0$$

Euclides-sel düz çizgilerin genellemesi

$$\left(\ddot C^m + (\Gamma_{kj}^{\;\;m} \circ C).\dot C^k.\dot C^j = 0 \right) (t)$$

pointwise prod.

(40)

Varsayım: ∇_X kontraksiyonlarla komüte eder! $\forall X \in \Gamma TM$

$\in T^1(M)$ $\quad \in T_1(M)$

$$\nabla_X(\beta(Y)) = (\nabla_X \beta)(Y) + \beta(\nabla_X Y)$$

$$\Rightarrow \quad \nabla_{X_a} e^b = -\underbrace{\omega^b{}_c(X_a)}\, e^c$$

ödev

$$i_{X_a}\omega^b{}_c = \Gamma_{a\,c}^{\;\;b}$$

varsayımın genellenmesi

$\in \Gamma T^r_s M$

$$\nabla_X(T(X_1, \dots, X_r, e^1, \dots, e^s))$$

$$= (\nabla_X T)(X_1, \dots, X_r, e^1, \dots, e^s)$$

$$+ \sum_{j=1}^{r} T(X_1, \dots, \nabla_X X_j, \dots, X_r, e^1, \dots, e^s)$$

$$+ \sum_{j=1}^{s} T(X_1, \dots, X_r, e^1, \dots, \nabla_X e^j, \dots, e^s)$$

$$\nabla_X : \Gamma T^r_s M \longrightarrow \Gamma T^r_s M$$

tip koruyan bir türev (0. dereceden homojen)

Leibnitz özelliği

$$\nabla_X (T \otimes W) = \nabla_X T \otimes W + T \otimes \nabla_X W$$

$$\forall\ T, W \in \underbrace{\Gamma \,\mathrm{Tens}\, M}_{\mathrm{Tens}(M)}$$

$T \in \Gamma T^r_s M$, $\{X_a\}, \{e^b\}$

$$T^{a_1 \dots a_s}{}_{b_1 \dots b_r}$$

$\nabla_{X_k} T \in \Gamma T^r_s M$

$$T^{a_1 \dots a_s}{}_{b_1 \dots b_r ; k}$$

Kovaryant diferansiyel :

$$\nabla : \Gamma T^r_s M \longrightarrow \Gamma T^{r+1}_s M$$

$$T \longmapsto \nabla T$$

$$(\nabla T)(X, X_1, \dots, X_r, e^1, \dots, e^s) := (\nabla_X T)(X_1, \dots, X_r, e^1, \dots, e^s)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} \nabla X_a = \omega^c{}_a \otimes X_c \\ \& \\ \nabla e^b = -\,\omega^b{}_c \otimes e^c \end{array}}$$

ödev

∇'nın eğrilik ve torsiyon tensör alanları

$\mathbb{T}_\nabla = \mathbb{T}$ — ∇'nın torsiyon operatörü

∇, $\mathcal{F}$-ikiçizgisel olmadığı için bir tensörle doğrudan ilişkili değildir.

$$\mathbb{T}(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

$\mathcal{F}$-ikiçizgisel ve anti-sim.

T — ∇'nın torsiyon tensör(ü) (alanı)

$\in \Gamma T^2_1 M$

$$T(X,Y,\beta) = \beta(\mathbb{T}(X,Y))$$

Torsiyon 2. formları T^a (herhangi bir yerel baz ile ilişik)

baz etiketi

$$T^a(X,Y) = \frac{1}{2} e^a(\mathbb{T}(X,Y))$$

$$\Rightarrow \quad T = 2\, T^a \otimes X_a$$ (torsiyon tensörü için lokal ifade)

$\{e^a\}$ her hangi bir ko-çerçeve

öyleki $\{\omega^a{}_b\}$ bağlantı 1-formları ise

bu ko-bazda

$$T^a = de^a + \omega^a{}_b \wedge e^b$$ (Cartan'ın 1. yapı denklemi)

(43)

$\mathbb{R}_\nabla = \mathbb{R}$ — ∇'nın eğrilik operatörü

$$\mathbb{R}(X,Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]}$$

anti-sim. & $\mathcal{F}$-ikiçizgisel

$$\mathbb{R}(X,Y)(U \otimes V) = \mathbb{R}(X,Y)U \otimes V + U \otimes \mathbb{R}(X,Y)V$$

Tens (M) üzerinde tip koruyan bir türev

özel olarak $\mathbb{R}(X,Y)f = 0$

$$\mathbb{R}(X,Y)(fU) = f\,\mathbb{R}(X,Y)U$$

∇'nın eğrilik tensör(ü) alanı

$$R \in \Gamma T^3_1 M$$

$$R(X,Y,Z,\beta) = \beta\big(\mathbb{R}(X,Y)Z\big)$$

Eğrilik 2-formları (lokal) $R^a{}_b$

$$R^a{}_b(X,Y) = \frac{1}{2} e^a\big(\mathbb{R}(X,Y)X_b\big)$$

$$\Rightarrow \quad R = 2\, R^a{}_b \otimes e^b \otimes X_a$$

$\{e^a\}$ koçerçevesine göre $\omega^a{}_b$ bağlantı 1-formları cinsinden

$$R^a{}_b = d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b$$

(Cartan'ın 2. yapı denklemi)

Maurer-Cartan

44

(1,3) tipi olan R'yi
kontrakte ederek (0,2) tipi olan
Ricci tensör(ünü) alanımı elde ederiz:

$$\mathbf{Ric}(X,Y) = R(X_a, X, Y, e^a)$$

$\{X_a\}$ ve $\{e^b\}$ dual
ve keyfi bazlar

genel bir ∇
için belirli
simetri özellikleri
yoktur.

Ricci 1-formları

$$\mathbf{Ric} = P_b \otimes e^b \quad ; \quad P_b := i_{X_a} R^a{}_b$$

Bianchi özdeşlikleri $\longleftrightarrow$ Bianchi tipleri

Bianchi'nin 1. özdeşliği

$$\underset{X,Y,Z}{\mathfrak{S}} \left\{ R(X,Y)(Z) - T(T(X,Y),Z) - (\nabla_X T)(Y,Z) \right\} = 0$$

|| lokal

$$dT^a + \omega^a{}_b \wedge T^b = R^a{}_b \wedge e^b \qquad \forall a$$

$$\underset{X,Y,Z}{\mathfrak{S}} \left\{ (\nabla_X R)(Y,Z) + R(T(X,Y),Z) \right\} = 0$$

|| lokal

$$dR^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge R^c{}_b - \omega^c{}_b \wedge R^a{}_c = 0 \qquad \forall a,b$$

$T^{(1,2)}(X,Y)$ — $(1,0)$ yani vektör $\longleftarrow$ $R^{(1,3)}(X,Y)Z$ — $(1,1)$ $(1,0)$

(45)

Metrik tensör alanları

T^r_s — $\bullet$ ile dual; $\circ$ ile aynı

$$g \in \Gamma T^2_0 M$$

$g|_p = g_p$, $T_p M$ bir metrik tensör / ya da iç çarpımdır.

g , simetrik , pozitif-tanımlı , dejenere değil ; M Riemann-sal manifold
$\mathrm{sig}(g) = (p, 0)$

g , simetrik , tanımsız , dejenere değil ; pseudo-Riemann-sal ya da yarı-Riemann-sal manifold ~~deniz~~
$\mathrm{sig}(g) = (p, q)$

$\mathrm{sig}(g) = (p, 1)$; Lorentz-sal manifold

denir.

$$g = g_{\mu\nu} \, dx^\mu \otimes dx^\nu$$

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}, \frac{\partial}{\partial x^\mu}\right) \; ; \quad dx^\mu\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) = \delta^\mu{}_\nu$$

$$g = \eta_{ab} \, e^a \otimes e^b \; ; \quad e^a(X_b) = \delta^a{}_b$$

46

$\tilde{X}, \alpha \in \Gamma T^*M$

$Y, X, \tilde{\alpha} \in \Gamma TM$ $g(\tilde{\alpha}, X) = \alpha(X)$

α'nın metrik duali
(g*-duali)

$g(X, Y) = \tilde{X}(Y)$

metrik
(kovar.)

X'in metrik duali
(g-duali)

dual metrik
(kontravar.)

$$g^*(\alpha, \beta) = g(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$$

$$g^* = g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \otimes \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \eta^{ab} X_a \otimes X_b$$

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = \delta^\nu{}_\rho$$

$$\eta^{ab} \eta_{bc} = \delta^a{}_c$$

$$dx^\mu \xrightarrow{GL(n,\mathcal{F})} e^a$$

$\{e^a\}$

Cartan'ın hareketli ko-çerçeve alanı
(lokal)

$$e^a = \underbrace{e^a{}_\mu}_{\in \mathcal{F}} dx^\mu$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \longrightarrow X_a$$

$$X_a = e_a{}^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

e'ler tersi

$$w = w_\mu \, dx^\mu = w_a \, e^a \qquad g^{\mu\nu}\partial_\nu = \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}$$

$$\tilde{w} = w_\mu \underbrace{\widetilde{dx^\mu}}_{g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}} = g^{\mu\nu} w_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} = w^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}$$

$$= w_a \, \widetilde{e^a} = w_a \underbrace{\eta^{ab} X_b}_{= X^a} = w^b X_b = w_a X^a$$

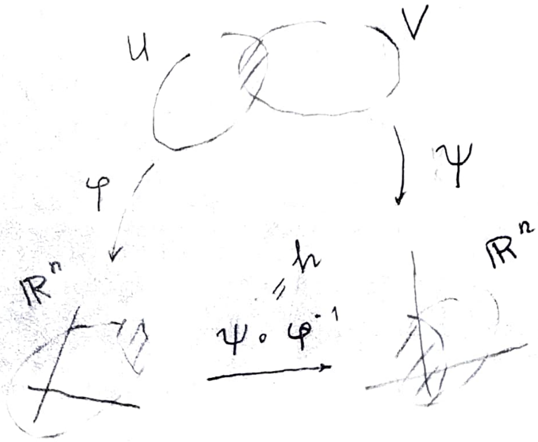
— · —

$$X = \xi^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \zeta^a X_a$$

$$\tilde{X} = \xi^\mu \underbrace{\widetilde{\frac{\partial}{\partial x^\mu}}}_{= g_{\mu\nu}\, dx^\nu} = \xi_\nu \, dx^\nu$$

$$= \zeta^a \underbrace{\tilde{X}_a}_{= \eta_{ab}\, e^b} = \zeta_b \, e^b = \zeta^a e_a$$

— · —



$h_x \longleftrightarrow h(x)$ Jacobian

$\downarrow$ det

$0 < f(x) \in \mathcal{F}^+$

$dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = dvol_x$

$\downarrow$

$\underbrace{dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n}_{dvol_y} = f \, dvol_x$

(48)

Yani yönlendirilebilir bir M diferansiyel manifoldu üzerinde yok olmayan ve işaret değiştirmeyen bir n-form alanı vardır. $\Longleftrightarrow$

M bir g, pseudo-Riemann-sal metrik kabul ediyorsa yönlendirici n-form için geleneksel seçim $\mathcal{Z} = e^1 \wedge e^2 \wedge \dots \wedge e^n$ ile verilir; $\{e^a\} :=$ g-ortonormal hareketli ko-çerçeve (alanı) lokal

$$\mathcal{Z} = {}^*1$$

$$\begin{aligned} {}^* : \Lambda^r &\longrightarrow \Lambda^{n-r} \\ \alpha &\longmapsto {}^*\alpha \end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{1}{r!} \alpha_{a_1 \dots a_r} \, e^{a_1} \wedge \dots \wedge e^{a_r}$$

$${}^*(e^{a_1} \wedge \dots \wedge e^{a_r}) = \frac{1}{(n-r)!} \underbrace{\epsilon^{a_1 \dots a_r}{}_{a_{r+1} \dots a_n}}_{} \, e^{a_{r+1}} \wedge \dots \wedge e^{a_n}$$

$\{e^a\}$, g^*-orto iken bildiğimiz Levi-Civita sembolleri!

49

$\varphi : M \longrightarrow N$ pürüzsüz bir difeo. ve

M ve N (pseudo)-Riemann-sal manifoldlar

ise

$\dim_{\mathbb{R}} M = \dim_{\mathbb{R}} N$

g_M , g_N

GR'daki anlamı

$$g_M = \varphi^* g_N$$

ile ilişkililer ise φ'ye bir pürüzsüz izometri denir.

$M = N \Rightarrow \varphi$'ye M'nin bir izometrisi denir. $\{\varphi_i\} = \mathrm{Iso}(M, g) \subseteq \mathrm{Diff}(M)$

$\varphi_i \longrightarrow K_i$

difeo. v.a. (φ_i'leri üretiyolar)

globaller

infinitesimal isometries (Killing v.a.)

$(\{K_i\}, [\ ,\ ])$ Lie cebri

$\forall p$ için bir komşulukta lokal ve ilgili modül başında

$$\Rightarrow [K_i, K_j] = \underbrace{c_{ij}{}^k}_{\text{yapı sabitleri}} K_k$$

Bu izometri grubu M üzerindeki (pseudo-)Riemann-sal yapının Killing simetrilerini tanımlar:

GR Schwarzschild

$$\mathcal{L}_K g = 0$$

$$\forall K \in \left(\{K_i\}, [\,,\,] \right)$$

$$0 \leq \# \{K_i\} \leq \frac{n(n+1)}{2}$$

hiç olmayabilir!

(51)

$T_\nabla = 0$

Killing denklemi

$$i_Z \nabla_Y \tilde{X} + i_Y \nabla_Z \tilde{X} = (\mathcal{L}_X g)(Y, Z)$$

$$X = K \Rightarrow \mathcal{L}_K g = 0$$

$\in \mathcal{F}$

$$X = C \Rightarrow \mathcal{L}_C g = 2\lambda g$$

$$Z \longrightarrow X_a$$
$$Y \longrightarrow X$$

$$\Rightarrow \quad i_{X_a} \nabla_X \tilde{K} + i_X \nabla_{X_a} \tilde{K} = 0$$

$e^a \wedge$

$$\Rightarrow \quad \nabla_X \tilde{K} + \underbrace{e^a \wedge i_X \nabla_{X_a} \tilde{K}}_{} = 0$$

$$- i_X (e^a \wedge \nabla_{X_a} \tilde{K})$$

$$+ \nabla_X \tilde{K}$$

$$\Rightarrow \quad \nabla_X \tilde{K} = \frac{1}{2} i_X d\tilde{K}$$

$\in \Gamma \Lambda^r M$

$$\nabla_X w = \frac{1}{r+1} i_X dw$$

$\xrightarrow{GR}$ Komar kütesi

(i) $\delta \tilde{C} = -n\lambda$

(ii) $\delta d \tilde{C} = 2 C^a P_a + 2(n-1) d\lambda$