# Gravitasyon & Genel Görelilik

52

# Pseudo-Riemann-sal Bağlantı

g-uyumlu bir $\nabla$ tamamen $T_\nabla$ ile karakterize edildiğinden herhangi bir pseudo-Riemannsal yapı için tek bir $\nabla g = 0$, $T_\nabla = 0$ olan $\nabla$ bağlantısı vardır = pseudo-Riemann-sal bağlantı denir

Bu bağlantı Levi-Civita ve Christoffel'in isimleri ile anılır.

$\Rightarrow$ koordinat bazında $\Gamma_{\mu\nu}{}^{\rho} = \Gamma_{\nu\mu}{}^{\rho}$ olur!

bu sebeple bağlantıya "simetrik" denir çoğu zaman.

Christoffel sembolleri

$$i_{X_i} i_{X_j} R_{kl} = i_{X_k} i_{X_l} R_{ij}$$

$$i_{X_i} P_j = i_{X_j} P_i \Rightarrow \text{Ric simetrik}$$

$$i_{X_i}{}^{*-1} G_j = i_{X_j}{}^{*-1} G_i \Rightarrow G = \text{Ein simetrik}$$

ve

$$\nabla \cdot G = 0$$

4D'de tek (D. LOVELOCK)

(53)

# Konformal Tensör

pseudo-Riemannsel $\Longleftarrow$ pseudo-Riemann-sal

$$\hat{g} = \exp(2\lambda)\, g$$

$\exists!\ \hat{\nabla}$ $\exists!\ \nabla$

ortonormal bazlarda

$$C_{ab} := R_{ab} - \frac{1}{n-2}\left(P_a \wedge e_b - P_b \wedge e_a\right) + \frac{1}{(n-2)(n-1)} \mathcal{R}\, e_a \wedge e_b$$

$g$

$$\hat{C}_{ab} = C_{ab}$$

$$C = 2\, C^a{}_b \otimes e^b \otimes X_a = \hat{C}$$

$$C_{ab} = C_{ba} \quad \text{her bazda}$$

$$C_{ab} \wedge e^b = 0$$

$$i_{X_a} i_{X_b} C_{pq} = i_{X_p} i_{X_q} C_{ab}$$

$$+$$

$$i_{X^a} C_{ab} = 0$$

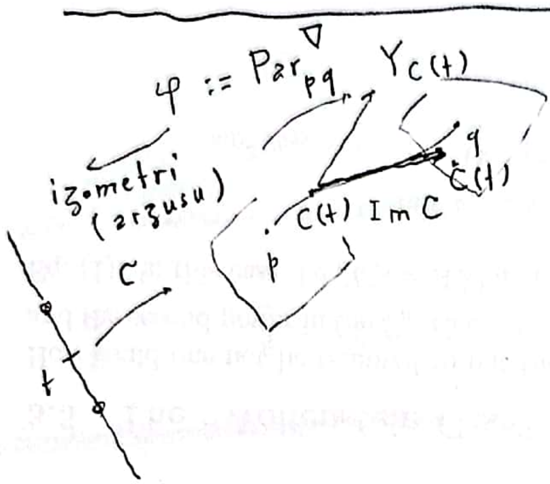
Bir manifold "konformal olarak düzdür" eğer onun metriği düz bir tanesi ile konformal ilişkiliyse.

$R = \mathrm{Riem}$

$$R_{ab} = 0 \Rightarrow C_{ab} = 0$$
$$\Rightarrow C = 0$$

54

# Metrik uyumlu ∇'lar




aslı başladığı noktaya geri gelmeyen yeni ∞ "uzun" bir eğri kompakt bir manifold'da olabilir mi? (⟷ Ergodic hyph.) ? geometrik

$$\dot{C}\,(g(Y,Y)) = \nabla_{\dot{C}}\,(g(Y,Y))$$

$$= (\nabla_{\dot{C}}\, g)(Y,Y) + 2\, g(\nabla_{\dot{C}} Y, Y)$$

$\nabla_{\dot{C}} Y = 0$ & $\nabla$, $g$-uyumlu

$$\Rightarrow \quad \nabla_{\dot{C}}\, g = 0 \ ; \ \forall C$$

"uzunluk", açı, yön

$$\boxed{\nabla g = 0} \Longrightarrow \omega_{ab} + \omega_{ba} = 0$$

$\eta_{ac}\, \omega^{c}{}_{b}$

$\Uparrow$

$(\{e^a\}, \{X_b\}$ $g^*$ & $g$-orto$)$

$g$

$\Rightarrow$ (ii) $[\nabla_X, *] = 0$

(i) $\nabla_X (*1) = 0$ ⟷ hacim

$$\alpha \wedge {*\beta} = g_r(\alpha, \beta)\, {*1}$$

$$\alpha, \beta \in \Gamma \Lambda^r M$$

Metrik uyumlu bir bağlantı tamamen torsiyonu ile karakterize edilir!

$$2\, g(\nabla_{Z_1} Z_3, Z_2) = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+1} \Big[ Z_i \big(g(Z_{i+1}, Z_{i+2})\big) + g(Z_i, [Z_{i+1}, Z_{i+3}]) + g(Z_i, \mathbb{T}(Z_{i+1}, Z_{i+2})) \Big]$$

$(\mathrm{mod}\ 3)$

$\{Y_i\}$ keyfi bir baz ve $C_{ij}^{\ k}$'lar da karşılık gelen yapı fonksiyonları ise

$$[Y_i, Y_j] = C_{ij}^{\ k} Y_k$$

$$\Rightarrow \quad \Gamma_{ij}^{\ k} = \frac{1}{2} g^{lk} \Big\{ X_i(g_{jl}) + X_j(g_{li}) - X_l(g_{ij}) - C_{jl}^{\ k} g_{ik} + C_{li}^{\ k} g_{jk} + C_{ij}^{\ k} g_{lk} - T(X_j, X_l, \tilde{X}_i) + T(X_l, X_i, \tilde{X}_j) + T(X_i, X_j, \tilde{X}_l) \Big\}$$

# Kovaryant Dış Türev

bir baza göre

İndisli form alanları için $d$'yi genelleyen bir türev tanımlamak çok kullanışlıdır ve $d$'nin aksine manifoldun paralellizm yapısını da içerir:

$$s^i{}_j \in \Gamma \Lambda^r M \quad ; \quad \{X_i\}, \{e^j\}$$

herhangi iki duzal baz

$$\Rightarrow \quad D s^i{}_j = d s^i{}_j + \omega^i{}_k \wedge s^k{}_j - \omega^k{}_j \wedge s^i{}_k$$

ayrıca

$$e^i \wedge \nabla_{X_i} = d - T^i \wedge i_{X_i}$$

indisli formların eldesi ve $D$'nin $\nabla$ ile tanımından

$$\Rightarrow \quad D(\underset{r}{S^I} \wedge \underset{s}{T^J}) = (D S^I) \wedge T^J + (-1)^r S^I \wedge D T^J$$

Gösterilebilir ki:

$$D g_{ij} = 0$$

$$D \varepsilon_{i_1 \dots i_n} = 0 \quad ; \quad {*1} = \frac{1}{n!} \varepsilon_{i_1 \dots i_n} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_n}$$

1. Bianchi $\quad D T^i = R^i{}_j \wedge e^j \quad ; \quad T^i = D e^i$

2. Bianchi $\quad D R^i{}_j = 0$

$$\boxed{D g_{ij} = 0 \, , \; \nabla g = 0} \longrightarrow \text{metrik uyumlu}$$

$$\omega'^{a}{}_{b} = \omega^{a}{}_{b} + A^{-1}{}_{q}{}^{a} \, D A_{b}{}^{q}$$

keyfi bağ

ayrıca

$$\varphi_{p,q,r,a} \, i_{X_p} i_{X_q} i_{X_r} DT_a = 2\left( i_{X_a} i_{X_q} R_{pr} - i_{X_p} i_{X_r} R_{aq} \right)$$

$$i_{X_p} i_{X_q} i_{X_a} DT^a = i_{X_q} P_p - i_{X_p} P_q$$

$$\left( i_{X_p} i_{X_q} i_{X_r} DT_a \right) e^a + \varphi_{p,q,r} \, i_{X_p} i_{X_q} DT_r = 2 \varphi_{p,q,r} \, i_{X_q} R_{pr}$$

$$i_{X_a} DT^a = P_b \wedge e^b$$

---

## Skaler eğrilik ve Einstein Tensörü

$$\mathcal{R} = Ric\left( X_a , X^a \right) = i_{X^a} P_a$$

$g$

n boyutta Einstein (n-1)-formları

$$G_k = R_{ij} \wedge i_{X_k} * e^{ij} \qquad \Gamma \Lambda^{n-1} M$$

$$\vdots$$

$$= \mathcal{R} * e_k - 2 * P_k - 2 * i_{X_k} i_{X_i} DT^i$$

Einstein tensörü

$$G = *^{-1} G_i \otimes e^i$$

$$\Gamma T^{2}_{0} M$$

59

$$\text{div}: \underset{(0,2)}{G} \longrightarrow \underset{(0,1)}{\text{div } G} = \nabla \cdot G$$

Covariant

$$(\nabla . G)(Y) = (\nabla_{X_a} G)(X^a, Y)$$

$$\Rightarrow \quad \nabla \cdot G = - {}^{*-1}\left(T^q \wedge i_{X_q} R_{ij} \wedge {}^* e^{ij}{}_k\right) e^k$$

Lor. connec.

$n = 4 \qquad (M, \nabla, g)$

$sig(g) = (3,1)$

stres 3-formları

madde alanları

$$\kappa\, G_a + T_a(g, \Phi) = 0$$

grav. geometri alanı değiller

pozitif çiftlenim sabiti

$\{e^a\}$ ko-bazındaki Einstein 3-formları

$$\mathcal{E}(g, \Phi) = 0$$

Stres formları keyfi değildir :

$G = {}^{*-1} G_a \otimes e^a$

$T = {}^{*-1} T_a \otimes e^a$

$$D G_a = 0 \Rightarrow D T_a = 0$$

$$G_a \wedge e_b = G_b \wedge e_a \Rightarrow T_a \wedge e_b = T_b \wedge e_a$$

$$\Downarrow$$

$$\zeta(X, Y) = \zeta(Y, X) \quad ; \quad \zeta = G, T$$

60

$$ {}^{*-1}G_a = \mathcal{R} e_a - 2 P_c \quad ; \quad T_\nabla = 0 $$

---

$n$ - boyutta EFE 'nin **Ödev**

$$ 2\kappa P_a = {}^{*-1}T_a - \frac{i_{X^b}\left({}^{*-1}T_b\right)}{(n-2)} e_a $$

şeklinde yazılabileceğini gösteriniz

---

Scanned with CamScanner

(61)

$(M, \nabla, g)$

Yerel kutupsal koordinat sistemi $(t, r, \theta, \varphi)$

$$g = -H_0(r)^2\, dt \otimes dt + H_1(r)^2\, dr \otimes dr + r^2 (d\theta \otimes d\theta + \sin^2\theta\, d\varphi \otimes d\varphi)$$

$g_{S^2_M} \longrightarrow$ A. GRAY

$0 \leq \theta \leq \pi$

$0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$0 \leq t < \infty$

$\mathrm{dom}(r) = r$' i se $\mathbb{R}$ | $H_0(r), H_1(r) \in \mathbb{R}$ o.ş kısıtlı

$$\boxed{\begin{aligned} e^0 &= H_0\, dt \\ e^1 &= H_1\, dr \\ e^2 &= r\, d\theta \\ e^3 &= r \sin\theta\, d\varphi \end{aligned}}$$

$$ds^2 = -H_0^2 (dt)^2 + H_2^2 dr^2 + r^2 ((d\theta)^2 + \sin^2\theta (d\varphi)^2)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \omega_{01} &= -\omega_{10} = -\frac{H_0'}{H_0 H_1} e^0 \\ \omega_{12} &= -\omega_{21} = -\frac{1}{r H_1} e^2 \\ \omega_{13} &= -\omega_{31} = -\frac{\cot\theta}{r} e^3 \end{aligned}}$$

önce arkası

62

$$R_{01} = \left(\frac{H_0'}{H_1}\right)' \frac{1}{H_0 H_1} e^{01}$$

$$R_{02} = \frac{H_0'}{r H_1^2 H_0} e^{02}$$

$$R_{03} = \frac{H_0'}{r H_1^2 H_0} e^{03}$$

$$R_{12} = -\frac{1}{r H_1}\left(\frac{1}{H_1}\right)' e^{12}$$

$$R_{13} = -\frac{1}{r H_1}\left(\frac{1}{H_1}\right)' e^{13}$$

$$R_{23} = \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{1}{H_1^2}\right) e^{23}$$

; $* 1 = e^0 \wedge e^1 \wedge e^2 \wedge e^3$

$$G^0 = -2\left[\frac{2}{r H_1}\left(\frac{1}{H_1}\right)' - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2 H_1^2}\right] e^{123}$$

$$G^1 = 2\left(\frac{2 H_0'}{r H_1^2 H_0} - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2 H_1^2}\right) e^{023}$$

$$G^2 = -2\, J(r)\, e^{013}$$

$$G^3 = 2\, J(r)\, e^{012}$$

; $$J(r) = \left(\frac{H_0'}{H_1}\right)' \frac{1}{H_0 H_1} + \frac{H_0'}{r H_1^2 H_0} + \frac{1}{r H_1}\left(\frac{1}{H_1}\right)'$$

63 Küresel sim. statik

vakum Einstein

$$G^a = 0 \Rightarrow H_0 = \frac{1}{H_1} = \left(1 + \frac{\mu}{r}\right)^{1/2}$$

Einstein-Maxwell

$$G^a = -\frac{1}{\kappa} \tau^a$$

$A = f(r)\, dt$ lokal (pafta) ayar seçimi

$$F = dA \; ; \; \mathcal{L}_{K_\mu} F = 0 \; ; \; \forall \mu$$

$$= -\frac{f'}{H_0 H_1} e^{01}$$

$$d^* F = 0 \Rightarrow L r^2 = q$$

$$\Rightarrow \tau^a = \frac{1}{2}\left( i_{X^a} F \wedge {}^*F - i_{X^a} {}^*F \wedge F \right)$$

$$\tau^0 = \frac{q^2}{2r^4} e^{123}, \quad \tau^1 = \frac{q^2}{2r^4} e^{023}, \quad \tau^2 = \frac{q^2}{2r^4} e^{013},$$

$$\tau^3 = -\frac{q^2}{2r^4} e^{012}$$

$$\Rightarrow H_0 = \frac{1}{H_1} = \left(1 + \frac{\mu}{r} + \frac{q^2}{4\kappa r^2}\right)^{1/2}$$

$|\mu| = M \longrightarrow$ mass types

$q = Q$

Komar

Tolman

ADM

⋮

global

Scanned with CamScanner