

Kara Deliklerin Entropisinin Mikroskopik Kökeni

$d = 3$ 'te Lovelock Kuramları

Gökhan Alkaç

August 23, 2024

Plan

- 1 Konformal Alan Kuramları
- 2 AdS Uzay-zamanı ve AdS/KAK Dualitesi
- 3 AdS₃ Uzay-zamanında Kütle Çekimi
- 4 Strominger'ın Mikroskobik Entropi Türetimi
- 5 Kara Delikler için Kuantum Mekaniksel Temel Durum (Ground state)
- 6 3 Boyutlu Lovelock Kuramları
- 7 Açık Problemler
- 8 Referanslar

Konformal Simetri

- Teorileri eylem üzerinden tanımlıyoruz:

$$I = \int dV \mathcal{L}(\Phi_A, \partial\Phi_A, \dots).$$

Konformal Simetri

- Teorileri eylem üzerinden tanımlıyoruz:

$$I = \int dV \mathcal{L}(\Phi_A, \partial\Phi_A, \dots).$$

- Uzay-zaman simetrisi: $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu - \xi^\mu \implies \delta_\xi I = \int dV \nabla_\mu B^\mu$.

Konformal Simetri

- Teorileri eylem üzerinden tanımlıyoruz:

$$I = \int dV \mathcal{L}(\Phi_A, \partial\Phi_A, \dots).$$

- Uzay-zaman simetrisi: $x^\mu \rightarrow x^{\mu'} = x^\mu - \xi^\mu \implies \delta_\xi I = \int dV \nabla_\mu B^\mu$.
- Minkowski uzay-zamanı üzerinde tanımlanmış bir teori için şöyle bir simetri düşünelim:

$$\delta_\xi \eta_{\mu\nu} = \mathcal{L}_\xi \eta_{\mu\nu} = \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu = f(x) \eta_{\mu\nu}.$$

Minkowski uzay-zamanı için konformal Killing denklemi.

Konformal Simetri

- Teorileri eylem üzerinden tanımlıyoruz:

$$I = \int dV \mathcal{L}(\Phi_A, \partial\Phi_A, \dots).$$

- Uzay-zaman simetrisi: $x^\mu \rightarrow x^{\mu'} = x^\mu - \xi^\mu \implies \delta_\xi I = \int dV \nabla_\mu B^\mu$.
- Minkowski uzay-zamanı üzerinde tanımlanmış bir teori için şöyle bir simetri düşünelim:

$$\delta_\xi \eta_{\mu\nu} = \mathcal{L}_\xi \eta_{\mu\nu} = \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu = f(x) \eta_{\mu\nu}.$$

Minkowski uzay-zamanı için konformal Killing denklemi.

- İz alarak şu forma sokulabilir:

$$\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu = \frac{2}{d} (\partial_\rho \xi^\rho) \eta_{\mu\nu}.$$

Konformal Simetri

- En genel çözüm:

$$\xi^\mu = a^\mu + \omega^\mu{}_\nu x^\nu + \lambda x^\mu + \lambda^\mu x^\alpha x_\alpha - 2\lambda_\alpha x^\alpha x^\mu,$$

$a_\mu, \omega_{\mu\nu} = \omega_{[\mu\nu]}, \lambda, \lambda_\mu \ll 1$ sabitler.

- En genel çözüm:

$$\xi^\mu = a^\mu + \omega^\mu{}_\nu x^\nu + \lambda x^\mu + \lambda^\mu x^\alpha x_\alpha - 2\lambda_\alpha x^\alpha x^\mu,$$

$a_\mu, \omega_{\mu\nu} = \omega_{[\mu\nu]}, \lambda, \lambda_\mu \ll 1$ sabitler.

- a_μ : öteleme
- $\omega^\mu{}_\nu$: Lorentz dönmeleri
- $[a^\mu, \omega^\mu{}_\nu]$: Poincare transtormasyonları ($\mathcal{L}_\xi \eta_{\mu\nu} = 0$)

Konformal Simetri

- En genel çözüm:

$$\xi^\mu = a^\mu + \omega^\mu{}_\nu x^\nu + \lambda x^\mu + \lambda^\mu x^\alpha x_\alpha - 2\lambda_\alpha x^\alpha x^\mu,$$

$a_\mu, \omega_{\mu\nu} = \omega_{[\mu\nu]}, \lambda, \lambda_\mu \ll 1$ sabitler.

- a_μ : öteleme
- $\omega^\mu{}_\nu$: Lorentz dönmeleri
- $[a^\mu, \omega^\mu{}_\nu]$: Poincare transtormasyonları ($\mathcal{L}_\xi \eta_{\mu\nu} = 0$)
- λ : genişleme (dilatation)
- λ_μ : özel konformal transformasyonlar (special conformal transformations)

$$\delta_\epsilon(T)X^\mu = \epsilon^A T_A X^\mu,$$
$$\epsilon^A = (a^\mu, \omega^{\mu\nu}, \lambda, \lambda^\mu), \quad T_A = (P_\mu, L_{\mu\nu}, K, K_{\mu\nu})$$

$$\delta_\epsilon(T)x^\mu = \epsilon^A T_A x^\mu,$$

$$\epsilon^A = (a^\mu, \omega^{\mu\nu}, \lambda, \lambda^\mu), \quad T_A = (P_\mu, L_{\mu\nu}, K, K_{\mu\nu})$$

$$P_\mu = -i\partial_\mu$$

$$L_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)$$

$$D = -ix^\mu\partial_\mu$$

$$K_\mu = -i(2x_\mu x^\nu\partial_\nu - x^2\partial_\mu)$$

- Operatörleri Hermitik yapmak için $-i$ faktorleri ekliyoruz.

$$[D, P_\mu] = iP_\mu$$

$$[D, K_\mu] = -iK_\mu$$

$$[K_\mu, P_\nu] = 2i(\eta_{\mu\nu}D - L_{\mu\nu})$$

$$[K_\rho, L_{\mu\nu}] = i(\eta_{\rho\mu}K_\nu - \eta_{\rho\nu}K_\mu)$$

$$[P_\rho, L_{\mu\nu}] = i(\eta_{\rho\mu}P_\nu - \eta_{\rho\nu}P_\mu)$$

$$[L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\nu\rho}L_{\mu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}L_{\nu\rho} - \eta_{\mu\rho}L_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}L_{\mu\rho})$$

$$[D, P_\mu] = iP_\mu$$

$$[D, K_\mu] = -iK_\mu$$

$$[K_\mu, P_\nu] = 2i(\eta_{\mu\nu}D - L_{\mu\nu})$$

$$[K_\rho, L_{\mu\nu}] = i(\eta_{\rho\mu}K_\nu - \eta_{\rho\nu}K_\mu)$$

$$[P_\rho, L_{\mu\nu}] = i(\eta_{\rho\mu}P_\nu - \eta_{\rho\nu}P_\mu)$$

$$[L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\nu\rho}L_{\mu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}L_{\nu\rho} - \eta_{\mu\rho}L_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}L_{\mu\rho})$$

1 genişleme + d öteleme + d özel konformal

$$+ \frac{d(d-1)}{2} \text{ dönme} = \frac{(d+2)(d+1)}{2} \text{ üreteç}$$

- $SO(d+2)$ tipi bir cebirin üreteç sayısı ile aynı!

$$J_{\mu,\nu} \equiv L_{\mu\nu}$$

$$J_{-1,\mu} \equiv \frac{1}{2} (P_\mu - K_\mu)$$

$$J_{0,\mu} \equiv \frac{1}{2} (P_\mu + K_\mu)$$

$$J_{-1,0} \equiv D$$

$$J_{\mu,\nu} \equiv L_{\mu\nu}$$

$$J_{-1,\mu} \equiv \frac{1}{2} (P_\mu - K_\mu)$$

$$J_{0,\mu} \equiv \frac{1}{2} (P_\mu + K_\mu)$$

$$J_{-1,0} \equiv D$$

$$[J_{mn}, J_{pq}] = i (\eta_{mq} J_{np} + \eta_{np} J_{mq} - \eta_{mp} J_{nq} - \eta_{nq} J_{mp})$$

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, -1, 1, \dots, 1)$$

$$J_{\mu,\nu} \equiv L_{\mu\nu}$$

$$J_{-1,\mu} \equiv \frac{1}{2} (P_\mu - K_\mu)$$

$$J_{0,\mu} \equiv \frac{1}{2} (P_\mu + K_\mu)$$

$$J_{-1,0} \equiv D$$

$$[J_{mn}, J_{pq}] = i (\eta_{mq} J_{np} + \eta_{np} J_{mq} - \eta_{mp} J_{nq} - \eta_{nq} J_{mp})$$

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, -1, 1, \dots, 1)$$

Önemli Sonuç

$\mathbb{R}^{1,d-1}$ üzerinde tanımlı konformal alan kuramlarının cebiri = $SO(2, d - 1)$

Konformal Transformasyonların Alanlara Etkisi

$$P_\mu \Phi(x) = -i \partial_\mu \Phi(x)$$

$$L_{\mu\nu} \Phi(x) = i (x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) \Phi(x) + S_{\mu\nu} \Phi(x)$$

$$D \Phi(x) = -i (x^\mu \partial_\mu + \Delta) \Phi(x)$$

$$K_\mu \Phi(x) = (-2i \Delta x_\mu - x^\nu S_{\mu\nu} - 2i x_\mu x^\nu \partial_\nu + i x^2 \partial_\mu) \Phi(x)$$

Konformal Transformasyonların Alanlara Etkisi

$$P_\mu \Phi(x) = -i \partial_\mu \Phi(x)$$

$$L_{\mu\nu} \Phi(x) = i (x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) \Phi(x) + S_{\mu\nu} \Phi(x)$$

$$D \Phi(x) = -i (x^\mu \partial_\mu + \Delta) \Phi(x)$$

$$K_\mu \Phi(x) = (-2i \Delta x_\mu - x^\nu S_{\mu\nu} - 2i x_\mu x^\nu \partial_\nu + i x^2 \partial_\mu) \Phi(x)$$

$$\Phi(\lambda x) = \lambda^{-\Delta} \Phi(x), \quad \Delta : \text{ölçeklenme boyutu (scaling dimension)}$$

Konformal Transformasyonların Alanlara Etkisi

$$P_\mu \Phi(x) = -i \partial_\mu \Phi(x)$$

$$L_{\mu\nu} \Phi(x) = i (x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) \Phi(x) + S_{\mu\nu} \Phi(x)$$

$$D \Phi(x) = -i (x^\mu \partial_\mu + \Delta) \Phi(x)$$

$$K_\mu \Phi(x) = (-2i \Delta x_\mu - x^\nu S_{\mu\nu} - 2i x_\mu x^\nu \partial_\nu + i x^2 \partial_\mu) \Phi(x)$$

$$\Phi(\lambda x) = \lambda^{-\Delta} \Phi(x), \quad \Delta : \text{ölçeklenme boyutu (scaling dimension)}$$

$$S = \int d^d x \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x), \quad \Delta = \frac{1}{2} d - 1$$

Konformal Değişmezliğin Klasik Sonuçları

$$\text{öteleme} \implies \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0,$$

Konformal Değişmezliğin Klasik Sonuçları

$$\text{öteleme} \implies \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0,$$

$$\text{dönme} \implies \partial_\mu J^{\mu\nu\rho} = 0, \quad J^{\mu\nu\rho} = T^{\mu\nu} x^\rho - T^{\mu\rho} x^\nu$$

Konformal Değişmezliğin Klasik Sonuçları

$$\text{öteleme} \implies \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0,$$

$$\text{dönme} \implies \partial_\mu J^{\mu\nu\rho} = 0, \quad J^{\mu\nu\rho} = T^{\mu\nu} x^\rho - T^{\mu\rho} x^\nu$$

$$\text{genişleme} \implies J_D^\mu = T^{\mu\nu} x_\nu = 0, \quad T^\mu{}_\mu = 0$$

Konformal Değişmezliğin Klasik Sonuçları

$$\text{öteleme} \implies \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0,$$

$$\text{dönme} \implies \partial_\mu J^{\mu\nu\rho} = 0, \quad J^{\mu\nu\rho} = T^{\mu\nu} x^\rho - T^{\mu\rho} x^\nu$$

$$\text{genişleme} \implies J_D^\mu = T^{\mu\nu} x_\nu = 0, \quad T^\mu{}_\mu = 0$$

$$\text{özel konformal dönüşüm} \implies \partial_\mu J_K^{\mu\nu} = 0, \quad j_K^{\mu\nu} = T^\mu{}_\rho (2x^\rho x^\nu - \eta^{\alpha\nu} x^2)$$

Konformal Değişmezliğin Kuantum Mekaniksel Sonuçları

$$\langle \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \rangle = \begin{cases} \frac{d_{12}}{|x_1 - x_2|^{2\Delta_1}}, & \Delta_1 = \Delta_2 \\ 0, & \Delta_1 \neq \Delta_2 \end{cases}$$

Konformal Değişmezliğin Kuantum Mekaniksel Sonuçları

$$\langle \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \rangle = \begin{cases} \frac{d_{12}}{|x_1 - x_2|^{2\Delta_1}}, & \Delta_1 = \Delta_2 \\ 0, & \Delta_1 \neq \Delta_2 \end{cases}$$

$$\langle \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \phi_3(x_3) \rangle = \frac{\lambda_{123}}{x_{12}^{\Delta_1 - 2\Delta_3} x_{23}^{\Delta_2 - 2\Delta_1} x_{13}^{\Delta_3 - 2\Delta_2}}, \quad \Delta \equiv \sum_i \Delta_i$$

Konformal Değişmezliğin Kuantum Mekaniksel Sonuçları

$$\langle \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \rangle = \begin{cases} \frac{d_{12}}{|x_1 - x_2|^{2\Delta_1}}, & \Delta_1 = \Delta_2 \\ 0, & \Delta_1 \neq \Delta_2 \end{cases}$$

$$\langle \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \phi_3(x_3) \rangle = \frac{\lambda_{123}}{x_{12}^{\Delta-2\Delta_3} x_{23}^{\Delta-2\Delta_1} x_{13}^{\Delta-2\Delta_2}}, \quad \Delta \equiv \sum_i \Delta_i$$

$$\langle \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \phi_3(x_3) \phi_4(x_4) \rangle = f(u, v) \prod_{i < j}^4 x_{ij}^{\Delta/3 - \Delta_i - \Delta_j}$$

$$\left(\frac{x_{12} x_{34}}{x_{13} x_{24}} \right)^2 \equiv u, \quad \left(\frac{x_{12} x_{34}}{x_{23} x_{14}} \right)^2 \equiv v$$

- 4-nokta fonksiyonu ve ötesinde özyükleme (bootstrap) teknikleri kullanılabilir.

Konformal Değişmezliğin Kuantum Mekaniksel Sonuçları

- **İz Anomalisi:** Çift d boyutunda

$$\langle T^\mu{}_\mu \rangle = \sum B_i I_i - 2(-)^{d/2} A E_d + B' \nabla_\mu J^\mu,$$

E_d : d boyutunda Euler yoğunluğu

I_i : $-d$ ağırlığındaki bağımsız Weyl değişmezleri.

$B' \nabla_a J^a$: konformal olarak değişmez ancak hesap yöntemine bağlı, karşı terimle elenebilen bir terim.

Konformal Değişmezliğin Kuantum Mekaniksel Sonuçları

- $d = 4$ için,

$$\langle T^\mu_\mu \rangle = \frac{c}{16\pi^2} C_{\mu\nu\rho\sigma} C^{\mu\nu\rho\sigma} - \frac{a}{16\pi^2} (R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} - 4R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + R^2) - \frac{a'}{16\pi^2} \nabla^2 R$$

$C_{\mu\nu\rho\sigma}$: Weyl tensörü

$R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} - 4R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + R^2 \sim 4$ boyutta Euler yoğunluğu

a, c : anomali katsayıları

Konformal Değişmezliğin Kuantum Mekaniksel Sonuçları

- $d = 4$ için,

$$\langle T_{\mu}^{\mu} \rangle = \frac{c}{16\pi^2} C_{\mu\nu\rho\sigma} C^{\mu\nu\rho\sigma} - \frac{a}{16\pi^2} (R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} - 4R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + R^2) - \frac{a'}{16\pi^2} \nabla^2 R$$

$C_{\mu\nu\rho\sigma}$: Weyl tensörü

$R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} - 4R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + R^2 \sim 4$ boyutta Euler yoğunluğu

a, c : anomali katsayıları

Önemli Sonuç

$$d = 2 \text{ için, } \quad \langle T_{\mu}^{\mu} \rangle = -\frac{1}{12} c R.$$

2 Boyutta Konformal Alan Kuramları

- 2 boyutta konformal Killing denklemleri:

$$\text{Minkowski: } \partial_0 \xi_1 = -\partial_1 \xi_0 \text{ ve } \partial_0 \xi_0 = -\partial_1 \xi_1$$

$$\text{Öklid: } \partial_1 \xi_2 = -\partial_2 \xi_1 \text{ ve } \partial_1 \xi_1 = \partial_2 \xi_2$$

2 Boyutta Konformal Alan Kuramları

- 2 boyutta konformal Killing denklemi:

$$\text{Minkowski: } \partial_0 \xi_1 = -\partial_1 \xi_0 \text{ ve } \partial_0 \xi_0 = -\partial_1 \xi_1$$

$$\text{Öklid: } \partial_1 \xi_2 = -\partial_2 \xi_1 \text{ ve } \partial_1 \xi_1 = \partial_2 \xi_2$$

- Öklidyen versiyonu çalışmak daha kolay:

$$z = x^1 + ix^2, \quad \bar{z} = x^1 - ix^2$$

$$\xi = \xi^1 + i\xi^2, \quad \bar{\xi} = \xi^1 - i\xi^2$$

2 Boyutta Konformal Alan Kuramları

- 2 boyutta konformal Killing denklemi:

$$\text{Minkowski: } \partial_0 \xi_1 = -\partial_1 \xi_0 \text{ ve } \partial_0 \xi_0 = -\partial_1 \xi_1$$

$$\text{Öklid: } \partial_1 \xi_2 = -\partial_2 \xi_1 \text{ ve } \partial_1 \xi_1 = \partial_2 \xi_2$$

- Öklidyen versiyonu çalışmak daha kolay:

$$z = x^1 + ix^2, \quad \bar{z} = x^1 - ix^2$$

$$\xi = \xi^1 + i\xi^2, \quad \bar{\xi} = \xi^1 - i\xi^2$$

- 2 boyutlu Öklidyen uzay için konformal Killing denklemi = kompleks koordinatlar için Cauchy-Riemann koşulları

2 Boyutta Konformal Alan Kuramları

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 = dzd\bar{z}$$

$$z \rightarrow f(z) = z + \epsilon(z), \quad \bar{z} \rightarrow \bar{f}(\bar{z}) = \bar{z} + \bar{\epsilon}(\bar{z})$$

$$ds^2 = dzd\bar{z} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} dzd\bar{z} \implies \text{Konformal Dönüşüm}$$

2 Boyutta Konformal Alan Kuramları

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 = dzd\bar{z}$$

$$z \rightarrow f(z) = z + \epsilon(z), \quad \bar{z} \rightarrow \bar{f}(\bar{z}) = \bar{z} + \bar{\epsilon}(\bar{z})$$

$$ds^2 = dzd\bar{z} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} dzd\bar{z} \implies \text{Konformal Dönüşüm}$$

- 2 boyutta sonsuz sayıda konformal dönüşüm var.

2 Boyutta Konformal Alan Kuramlari

- $\epsilon(z)$ 'yi genel bir meromorfik fonksiyon düşünelim:

$$z' = f(z) = z + \epsilon(z) = z + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \epsilon_n (-z^{n+1})$$

$$\bar{z}' = \bar{f}(\bar{z}) = \bar{z} + \bar{\epsilon}(\bar{z}) = \bar{z} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{\epsilon}_n (-\bar{z}^{n+1})$$

$\epsilon_n, \bar{\epsilon}_n$: sonsuz küçük sabitler

2 Boyutta Konformal Alan Kuramlari

- $\epsilon(z)$ 'yi genel bir meromorfik fonksiyon düşünelim:

$$z' = f(z) = z + \epsilon(z) = z + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \epsilon_n (-z^{n+1})$$

$$\bar{z}' = \bar{f}(\bar{z}) = \bar{z} + \bar{\epsilon}(\bar{z}) = \bar{z} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{\epsilon}_n (-\bar{z}^{n+1})$$

$\epsilon_n, \bar{\epsilon}_n$: sonsuz küçük sabitler

- Spinsiz ve ölçeklenme boyutu sıfır olan bir alana etkisi

$$\delta\phi = \epsilon(z)\partial\phi + \bar{\epsilon}(\bar{z})\bar{\partial}\phi$$

2 Boyutta Konformal Alan Kuramları

- m 'inci terimin üretici: $\ell_m = -z^{m+1}\partial_z$
- Witt cebirinin iki kopyası:

$$[\ell_m, \ell_n] = (m - n)\ell_{m+n}$$

$$[\bar{\ell}_m, \bar{\ell}_n] = (m - n)\bar{\ell}_{m+n}$$

$$[\ell_m, \bar{\ell}_n] = 0$$

2 Boyutta Konformal Alan Kuramları

- m 'inci terimin üretici: $\ell_m = -z^{m+1}\partial_z$
- Witt cebirinin iki kopyası:

$$[\ell_m, \ell_n] = (m - n)\ell_{m+n}$$

$$[\bar{\ell}_m, \bar{\ell}_n] = (m - n)\bar{\ell}_{m+n}$$

$$[\ell_m, \bar{\ell}_n] = 0$$

- $(\ell_{-1}, \ell_0, \ell_1)$ ve $(\bar{\ell}_{-1}, \bar{\ell}_0, \bar{\ell}_1)$: $SL(2, \mathbb{C}) \approx SO(1,3) \approx SO(2,2)$
→ global konformal cebir

2 Boyutta Konformal Alan Kuramları

- m 'inci terimin üretici: $\ell_m = -z^{m+1} \partial_z$
- Witt cebirinin iki kopyası:

$$[\ell_m, \ell_n] = (m - n) \ell_{m+n}$$

$$[\bar{\ell}_m, \bar{\ell}_n] = (m - n) \bar{\ell}_{m+n}$$

$$[\ell_m, \bar{\ell}_n] = 0$$

- $(\ell_{-1}, \ell_0, \ell_1)$ ve $(\bar{\ell}_{-1}, \bar{\ell}_0, \bar{\ell}_1)$: $SL(2, \mathbb{C}) \approx SO(1,3) \approx SO(2,2)$
→ global konformal cebir
- Merkezi genişletime izin veriyor: Virasoro cebiri

$$[L_m, L_n] = (m - n) L_{m+n} + \frac{c}{12} (m^3 - m) \delta_{m+n,0},$$

c : merkezi yük

2 Boyutta Kuantum Konformal Alan Kuramlari

- Merkezi genişletim projektif temsillerin gerçek temsiller olmasını sağlıyor. Bu da tam olarak kuantizasyonda istediğimiz şey!

2 Boyutta Kuantum Konformal Alan Kuramları

- Merkezi genişletim projektif temsillerin gerçek temsiller olmasını sağlıyor. Bu da tam olarak kuantizasyonda istediğimiz şey!
- Kompleks analiz yardımıyla doğrudan hesap da yapılabilir:

$$L_n = \frac{1}{2\pi i} \oint dz z^{n+1} T(z) \quad , \quad \bar{L}_n = \frac{1}{2\pi i} \oint d\bar{z} \bar{z}^{n+1} \bar{T}(\bar{z})$$

$$\begin{aligned} [L_m, L_n] &= \oint \frac{dw}{2\pi i} \oint_w \frac{dz}{2\pi i} z^{m+1} w^{n+1} T(z) T(w) \\ &= (m - n)L_{m+n} + \frac{c}{12} m(m^2 - 1) \delta_{m+n,0} \end{aligned}$$

Önemli Sonuç

2 boyutlu kuantum konformal kuramların simetri cebiri =
Virasoro cebirinin 2 kopyası

Plan

- 1 Konformal Alan Kuramları
- 2 AdS Uzay-zamanı ve AdS/KAK Dualitesi
- 3 AdS₃ Uzay-zamanında Kütle Çekimi
- 4 Strominger'ın Mikroskobik Entropi Türetimi
- 5 Kara Delikler için Kuantum Mekaniksel Temel Durum (Ground state)
- 6 3 Boyutlu Lovelock Kuramları
- 7 Açık Problemler
- 8 Referanslar

AdS Uzay-zamanı

- Düz $\mathbb{R}^{2,d-1}$ uzay-zamanı ile başlayalım:

$$ds_{d+1}^2 = -dX_0^2 - dX_d^2 + dX_1^2 + \cdots + dX_{d-1}^2$$

AdS Uzay-zamanı

- Düz $\mathbb{R}^{2,d-1}$ uzay-zamanı ile başlayalım:

$$ds_{d+1}^2 = -dX_0^2 - dX_d^2 + dX_1^2 + \cdots + dX_{d-1}^2$$

- Şöyle bir “küre” seçelim:

$$-X_0^2 - X_d^2 + X_1^2 + \cdots + X_{d-1}^2 = -L^2$$

- Bu kısıt yüzeyi d boyutlu AdS uzay-zamanını tanımlar.

AdS Uzay-zamanı

- Düz $\mathbb{R}^{2,d-1}$ uzay-zamanı ile başlayalım:

$$ds_{d+1}^2 = -dX_0^2 - dX_d^2 + dX_1^2 + \cdots + dX_{d-1}^2$$

- Şöyle bir “küre” seçelim:

$$-X_0^2 - X_d^2 + X_1^2 + \cdots + X_{d-1}^2 = -L^2$$

- Bu kısıt yüzeyi d boyutlu AdS uzay-zamanını tanımlar.
- AdS_d uzay-zamanının simetri grubu: $\text{SO}(2, d - 2)$

- AdS_{d+1} uzay-zamaninin simetri grubu: $\text{SO}(2, d - 1)$

AdS/KAK Dualitesi

- AdS_{d+1} uzay-zamaninin simetri grubu: $\text{SO}(2, d - 1)$
- d boyutlu konformal alan kuramlarının simetri grubu: $\text{SO}(2, d - 1)$

AdS/KAK Dualitesi

- AdS_{d+1} uzay-zamanının simetri grubu: $\text{SO}(2, d - 1)$
- d boyutlu konformal alan kuramlarının simetri grubu: $\text{SO}(2, d - 1)$

AdS/KAK dualitesi

AdS_{d+1} uzay-zamanında kuantum kütleçekim kuramı =
 d boyutlu konformal ayar kuramı

AdS/KAK Dualitesi

- AdS_{d+1} uzay-zamanının simetri grubu: $\text{SO}(2, d - 1)$
- d boyutlu konformal alan kuramlarının simetri grubu: $\text{SO}(2, d - 1)$

AdS/KAK dualitesi

AdS_{d+1} uzay-zamanında kuantum kütleçekim kuramı =
 d boyutlu konformal ayar kuramı

- Maldacena: Bazı KAK'larının büyük N_c limiti Hilbert uzayında süperkütle çekimi kuramlarına denk bir sektör barındırıyor. Sicim kuramı yardımıyla örnekler bulmak mümkün.
- Örnek: $4d \text{ SYM} = \text{AdS}_5 \times S^5$ üzerinde Tip IIB süperkütleçekim kuramı

- AdS₅ uzay-zamanının çizgi elemanı (Poincare kordinatlarında):

$$ds_5^2 = \left(\frac{r}{L}\right)^2 (-dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2) + L^2 \frac{dr^2}{r^2}$$

- AdS₅ uzay-zamanının çizgi elemanı (Poincare kordinatlarında):

$$ds_5^2 = \left(\frac{r}{L}\right)^2 (-dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2) + L^2 \frac{dr^2}{r^2}$$

- İzometri grubu SO(2,4): 4 boyutlu KAK'larının simetri grubu

- AdS₅ uzay-zamanının çizgi elemanı (Poincare kordinatlarında):

$$ds_5^2 = \left(\frac{r}{L}\right)^2 (-dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2) + L^2 \frac{dr^2}{r^2}$$

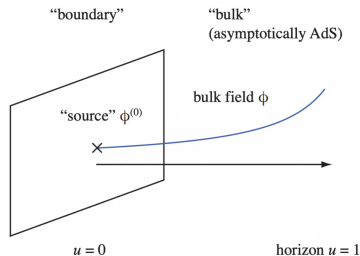
- İzometri grubu SO(2,4): 4 boyutlu KAK'larının simetri grubu
- $x^\mu = (t, x, y, z)$ üzerinden ISO(1,3) değişmezliği (Poincare grubu)

- AdS₅ uzay-zamanının çizgi elemanı (Poincare koordinatlarında):

$$ds_5^2 = \left(\frac{r}{L}\right)^2 (-dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2) + L^2 \frac{dr^2}{r^2}$$

- İzometri grubu SO(2,4): 4 boyutlu KAK'larının simetri grubu
- $x^\mu = (t, x, y, z)$ üzerinden ISO(1,3) değişmezliği (Poincare grubu)
- 4 boyutlu ölçek değişmezliği: $x^\mu \rightarrow \lambda x^\mu$, $r \rightarrow \frac{1}{\lambda} r$.
- r : ayar kuramının enerji ölçeği

Örnek: Korrelasyon Fonksiyonları



$$Z_{\text{ayar}} = Z_{\text{kütle çekimi}}$$

$$\left\langle \exp \left(i \int \phi^{(0)} \mathcal{O} \right) \right\rangle = e^{iS[\phi|_{u=0}=\phi^{(0)}]}$$

\mathcal{O} : KAK'da tanımlı bir operatör

ϕ : Kütle çekimi teorisinde tanımlı bir alan

Plan

- 1 Konformal Alan Kuramları
- 2 AdS Uzay-zamanı ve AdS/KAK Dualitesi
- 3 AdS₃ Uzay-zamanında Kütle Çekimi**
- 4 Strominger'ın Mikroskobik Entropi Türetimi
- 5 Kara Delikler için Kuantum Mekaniksel Temel Durum (Ground state)
- 6 3 Boyutlu Lovelock Kuramları
- 7 Açık Problemler
- 8 Referanslar

$d = 3$ 'te Genel Görelilik Kuramı

- $d = 3$ 'te kozmolojik sabit yokken Newton limiti tanımlı değil.

$d = 3$ 'te Genel Görelilik Kuramı

- $d = 3$ 'te kozmolojik sabit yokken Newton limiti tanımlı değil.
- Kozmolojik sabit eklense bile serbestlik derecesi sayısı 0!

$$C_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\rho\sigma\mu\nu} - 2(g_{\rho[\mu}R_{\nu]\sigma} - g_{\sigma[\mu}R_{\nu]\rho}) + Rg_{\rho[\mu}g_{\nu]\sigma} = 0$$

$R_{\mu\nu} = 2\Lambda g_{\mu\nu}$ iken $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ herhangi bir x noktasında metrik tarafından direkt olarak belirlenir.

$d = 3$ 'te Genel Görelilik Kuramı

- $d = 3$ 'te kozmolojik sabit yokken Newton limiti tanımlı değil.
- Kozmolojik sabit eklense bile serbestlik derecesi sayısı 0!

$$C_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\rho\sigma\mu\nu} - 2(g_{\rho[\mu}R_{\nu]\sigma} - g_{\sigma[\mu}R_{\nu]\rho}) + Rg_{\rho[\mu}g_{\nu]\sigma} = 0$$

$R_{\mu\nu} = 2\Lambda g_{\mu\nu}$ iken $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ herhangi bir x noktasında metrik tarafından direkt olarak belirlenir.

- Bu sonuç doğrudan bir Hamiltonyen analiz ile de doğrulanabilir. Bu sebeple çok uzun süre kuramın bir kara delik çözüme sahip olmayacağı düşünülmüştür.

Bañados-Teitelboim-Zanelli (BTZ) Kara Delik Çözümü

$$I = \frac{1}{16\pi G} \int d^3x \sqrt{-g} \left[R + \frac{2}{\ell^2} \right]$$

$$ds_b^2 = -\frac{r^2 - r_+^2}{\ell^2} dt_b^2 + \frac{\ell^2}{r^2 - r_+^2} dr^2 + r^2 d\theta_b^2,$$

$$\beta = \frac{1}{T} = \frac{2\pi\ell^2}{r_+}, \quad M = \frac{r_+^2}{8G\ell^2}, \quad S = \frac{A}{4G} = \frac{\pi r_+}{2G},$$

Bañados-Teitelboim-Zanelli (BTZ) Kara Delik Çözümü

$$I = \frac{1}{16\pi G} \int d^3x \sqrt{-g} \left[R + \frac{2}{\ell^2} \right]$$

$$ds_b^2 = -\frac{r^2 - r_+^2}{\ell^2} dt_b^2 + \frac{\ell^2}{r^2 - r_+^2} dr^2 + r^2 d\theta_b^2,$$

$$\beta = \frac{1}{T} = \frac{2\pi\ell^2}{r_+}, \quad M = \frac{r_+^2}{8G\ell^2}, \quad S = \frac{A}{4G} = \frac{\pi r_+}{2G},$$

- Termodinamiğin 1. yasasını sağlar: $\delta S = \beta \delta M$
- Döner genellemesi var.

Asimptotik Simetri Cebiri

- Bir kuramı tanımlamak için sadece eylem vermek yeterli değil. Sınır koşulları da verilmeli.

Asimptotik Simetri Cebiri

- Bir kuramı tanımlamak için sadece eylem vermek yeterli değil. Sınır koşulları da verilmeli.
- Alanların asimptotik davranışları şu koşulları sağlamalı:
 - 1 Mümkün olduğunca fazla asimptotik simetri olmalı.

Asimptotik Simetri Cebiri

- Bir kuramı tanımlamak için sadece eylem vermek yeterli değil. Sınır koşulları da verilmeli.
- Alanların asimptotik davranışları şu koşulları sağlamalı:
 - 1 Mümkün olduğunca fazla asimptotik simetri olmalı.
 - 2 Alanlar sonsuzda düzgün davranacak kadar kısıtlanmalı ancak fiziksel önemi olan çözümlere izin verileceği garanti edilmeli.

Asimptotik Simetri Cebiri

- Bir kuramı tanımlamak için sadece eylem vermek yeterli değil. Sınır koşulları da verilmeli.
- Alanların asimptotik davranışları şu koşulları sağlamalı:
 - 1 Mümkün olduğunca fazla asimptotik simetri olmalı.
 - 2 Alanlar sonsuzda düzgün davranacak kadar kısıtlanmalı ancak fiziksel önemi olan çözümlere izin verileceği garanti edilmeli.
 - 3 Alanlar global yüklerin varyasyonunun sonlu kalacağını garanti edecek kadar hızlı bir şekilde düşmeli.

Asimptotik Simetri Cebiri

- Bir kuramı tanımlamak için sadece eylem vermek yeterli değil. Sınır koşulları da verilmeli.
- Alanların asimptotik davranışları şu koşulları sağlamalı:
 - 1 Mümkün olduğunca fazla asimptotik simetri olmalı.
 - 2 Alanlar sonsuzda düzgün davranacak kadar kısıtlanmalı ancak fiziksel önemi olan çözümlere izin verileceği garanti edilmeli.
 - 3 Alanlar global yüklerin varyasyonunun sonlu kalacağını garanti edecek kadar hızlı bir şekilde düşmeli.
 - 4 Yüklerin varyasyonu integrelenmeli ve sıfırdan farklı olmalı.

Asimptotik Simetri Cebiri: Brown-Henneaux Sınır koşulları

- Madde olmayan durumda metrik bileşenlerinin nasıl olabileceğine dair bir örnek Brown-Henneaux tarafından verildi:

$$\begin{aligned}g_{rr} &= \frac{l^2}{r^2} + O(r^{-4}) & g_{tt} &= -\frac{r^2}{l^2} + O(1) \\g_{tr} &= O(r^{-3}) & g_{\varphi\varphi} &= r^2 + O(1) \\g_{\varphi r} &= O(r^{-3}) & g_{t\varphi} &= O(1)\end{aligned}$$

Asimptotik Simetri Cebiri: Brown-Henneaux Sınır koşulları

- Madde olmayan durumda metrik bileşenlerinin nasıl olabileceğine dair bir örnek Brown-Henneaux tarafından verildi:

$$\begin{aligned}g_{rr} &= \frac{l^2}{r^2} + O(r^{-4}) & g_{tt} &= -\frac{r^2}{l^2} + O(1) \\g_{tr} &= O(r^{-3}) & g_{\varphi\varphi} &= r^2 + O(1) \\g_{\varphi r} &= O(r^{-3}) & g_{t\varphi} &= O(1)\end{aligned}$$

- Bu koşulları değiştirmez bırakan simetri grubu şu asimptotik Killing vektorleri tarafından üretilir:

$$\xi^t = l \left[T^+ + T^- + \frac{l^2}{2r^2} (\partial_+^2 T^+ + \partial_-^2 T^-) \right] + O(r^{-4})$$

$$\xi^r = -r (\partial_+ T^+ + \partial_- T^-) + O(r^{-1})$$

$$\xi^\varphi = T^+ - T^- - \frac{l^2}{2r^2} (\partial_+^2 T^+ - \partial_-^2 T^-) + O(r^{-4})$$

$$T^+(x^+), T^-(x^-), x^\pm = t/l \pm \varphi$$

- İlgili yükleri bulmak için Hamilton formülasyonuna geçelim:

$$ds^2 = -(N^\perp)^2 dt^2 + \gamma_{ij} (dx^i + N^i dt) (dx^j + N^j dt)$$

$$I = \int d^3x \left\{ \pi^{ij} \dot{\gamma}_{ij} - N^\perp \mathcal{H}_\perp - N^i \mathcal{H}_i \right\}$$

$$\mathcal{H}_\perp = \frac{2\kappa}{\sqrt{\gamma}} (\pi^{ij} \pi_{ij} - \pi^2) - \frac{\sqrt{\gamma}}{2\kappa} \left({}^{(2)}R - 2\Lambda \right)$$

$$\mathcal{H}_i = -2\nabla_j \pi_i^j$$

Asimptotik Simetri Cebiri: Yükler

$$H[\xi] = \int d^2x \left[\epsilon^\perp \mathcal{H}_\perp + \epsilon^i \mathcal{H}_i \right] + Q[\xi], \quad \epsilon^\perp = N^\perp \xi^t; \epsilon^i = \xi^i + N^i \xi^t$$

- Regge-Teitelboim: Fonksiyonel türevlerin düzgün tanımlı olması için $Q[\xi]$ sınır terimleri eklenmeli. Örnek:

$$\Phi_{\mathcal{H}^i} [\xi^i] = \int d^2x \xi_i(x) \mathcal{H}^i,$$

$$\delta\gamma_{ij}(x) = \{ \gamma_{ij}(x), \Phi_{\mathcal{H}^i}[\xi] \} = \xi_{i/j} + \xi_{j/i} = \mathcal{L}_\xi \gamma_{ij}$$

Asimptotik Simetri Cebiri: Yükler

$$H[\xi] = \int d^2x \left[\epsilon^\perp \mathcal{H}_\perp + \epsilon^i \mathcal{H}_i \right] + Q[\xi], \quad \epsilon^\perp = N^\perp \xi^t; \epsilon^i = \xi^i + N^i \xi^t$$

- Regge-Teitelboim: Fonksiyonel türevlerin düzgün tanımlı olması için $Q[\xi]$ sınır terimleri eklenmeli. Örnek:

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{H}^i} [\xi^i] &= \int d^2x \xi_i(x) \mathcal{H}^i, \\ \delta \gamma_{ij}(x) &= \{ \gamma_{ij}(x), \Phi_{\mathcal{H}^i}[\xi] \} = \xi_{i/j} + \xi_{j/i} = \mathcal{L}_\xi \gamma_{ij} \end{aligned}$$

- Bu sınır terimleri doğrudan global yükleri veriyor!

$$Q [T^+, T^-] = \int d\phi \{ T^+(\phi) L^+(\phi) - T^-(\phi) L^-(\phi) \}$$

$L^\pm(\phi)$: Sınır koşulları tarafından belirlenen fonksiyonlar.

$$\{Q[\xi], Q[\eta]\} = \delta_\eta Q[\xi], \quad L^\pm(\phi) = \frac{1}{2\pi} \sum_n L_n^\pm e^{in\phi}$$

$$i \{L_m^\pm, L_n^\pm\} = (m - n)L_{m+n}^\pm + \frac{c}{12} m^3 \delta_{m+n,0}, \quad c = \frac{3\ell}{2G}$$

$$i \{L_m^\pm, c\} = 0$$

$$i \{c, c\} = 0$$

$$\{Q[\xi], Q[\eta]\} = \delta_\eta Q[\xi], \quad L^\pm(\phi) = \frac{1}{2\pi} \sum_n L_n^\pm e^{in\phi}$$

$$i \{L_m^\pm, L_n^\pm\} = (m - n)L_{m+n}^\pm + \frac{c}{12} m^3 \delta_{m+n,0}, \quad c = \frac{3\ell}{2G}$$

$$i \{L_m^\pm, c\} = 0$$

$$i \{c, c\} = 0$$

- $L_0 \rightarrow L_0 - \frac{c}{24}$ yaparsak Virasoro cebirinin aynısı!

Önemli Sonuç

AdS₃ uzay-zamanında genel görelilik kuramının asimtotik simetri cebiri merkezi yük $c = \frac{3\ell}{2G}$ olacak şekilde Virasoro cebirinin iki kopyası. Sicim teorisi yada süpersimetriye başvurmadan AdS₃/KAK₂ dualitesi doğrudan varsayılabilir!

Plan

- 1 Konformal Alan Kuramları
- 2 AdS Uzay-zamanı ve AdS/KAK Dualitesi
- 3 AdS₃ Uzay-zamanında Kütle Çekimi
- 4 Strominger'ın Mikroskobik Entropi Türetimi**
- 5 Kara Delikler için Kuantum Mekaniksel Temel Durum (Ground state)
- 6 3 Boyutlu Lovelock Kuramları
- 7 Açık Problemler
- 8 Referanslar

Strominger'ın Mikroskobik Entropi Türetimi

- Cardy'nin 2 boyutlu KAK'lar için entropi formülü:

$$S_{\text{Cardy}} = 2\pi\sqrt{\frac{c^+}{6}\tilde{\Delta}^+} + 2\pi\sqrt{\frac{c^-}{6}\tilde{\Delta}^-}$$

$\tilde{\Delta}^\pm$: ötelenmiş Virasoro operatörü $\tilde{L}_0^\pm = L_0^\pm - \frac{c^\pm}{24}$ 'nin özdeğerleri

Strominger'ın Mikroskobik Entropi Türetimi

- Cardy'nin 2 boyutlu KAK'lar için entropi formülü:

$$S_{\text{Cardy}} = 2\pi\sqrt{\frac{c^+}{6}\tilde{\Delta}^+} + 2\pi\sqrt{\frac{c^-}{6}\tilde{\Delta}^-}$$

$\tilde{\Delta}^\pm$: ötelenmiş Virasoro operatörü $\tilde{L}_0^\pm = L_0^\pm - \frac{c^\pm}{24}$ 'nin özdeğerleri

- $x^\pm = \frac{t}{\ell} \pm \phi \implies \partial_\pm = \frac{1}{\ell}\partial_t + \partial_\phi \implies Q(\partial_\pm) = \frac{1}{\ell}Q(\partial_t) + Q(\partial_\phi)$ olduğundan

$$\tilde{\Delta}^\pm = \frac{1}{2}(M\ell \pm J)$$

olmalıdır.

Strominger'ın Mikroskobik Entropi Türetimi: Statik BTZ Kara Deliği

- Hawking-Gibbons:

$$Z = \int_{\text{periyodik}} \mathcal{D}g e^{-I_E} \approx e^{-I_E}|_{\text{on-shell}} = \text{Tr}_{\mathcal{H}} e^{-\beta F}$$

Yarı-klasik olarak

$$M = \partial_{\beta} I_E|_{\text{on-shell}} , \quad S = (\beta \partial_{\beta} - 1) I_E|_{\text{on-shell}}$$

Strominger'in Mikroskopik Entropi Türetimi: Statik BTZ Kara Deliği

- Hawking-Gibbons:

$$Z = \int_{\text{periyodik}} \mathcal{D}g e^{-I_E} \approx e^{-I_E}|_{\text{on-shell}} = \text{Tr}_{\mathcal{H}} e^{-\beta F}$$

Yarı-klasik olarak

$$M = \partial_{\beta} I_E|_{\text{on-shell}} , \quad S = (\beta \partial_{\beta} - 1) I_E|_{\text{on-shell}}$$

- Statik BTZ kara deliği için

$$\beta = \frac{2\pi\ell^2}{r_+}, \quad M = \frac{r_+^2}{8G\ell^2}, \quad S = \frac{A}{4G} = \frac{\pi r_+}{2G}$$

Strominger'ın Mikroskobik Entropi Türetimi: Statik BTZ Kara Deliği

Önemli Sonuç

$$c^{\pm} = \frac{3\ell}{2G}, \quad M = \frac{r_+^2}{8G\ell^2} \text{ kullanılırsa}$$

$$S_{\text{Cardy}} = S.$$

Yarı-klasik entropiyi 2 boyutlu bir konformal alan kuramının kuantum mekaniksel durumlarını sayarak elde etmek mümkün!

Strominger'ın Mikroskopik Entropi Türetimi: Problemler ve Çözüm

- Farklı teoriler farklı kara delik çözümlerine ancak aynı merkezi yüke sahip olabilir.

Strominger'ın Mikroskopik Entropi Türetimi: Problemler ve Çözüm

- Farklı teoriler farklı kara delik çözümlerine ancak aynı merkezi yüke sahip olabilir.
- Tek bir teoride birden farklı kara delik çözümü bulunabilir.

Strominger'ın Mikroskopik Entropi Türetimi: Problemler ve Çözüm

- Farklı teoriler farklı kara delik çözümlerine ancak aynı merkezi yüke sahip olabilir.
- Tek bir teoride birden farklı kara delik çözümü bulunabilir.
- Çözüm: Standart Cardy formülünde bir varsayım: Virasoro operatörü \tilde{L}_0^\pm 'in en küçük özdeğerleri sıfır $\tilde{\Delta}_\pm^0 = 0$. Bu varsayım irdelenmeli.

Plan

- 1 Konformal Alan Kuramları
- 2 AdS Uzay-zamanı ve AdS/KAK Dualitesi
- 3 AdS₃ Uzay-zamanında Kütle Çekimi
- 4 Strominger'ın Mikroskobik Entropi Türetimi
- 5 **Kara Delikler için Kuantum Mekaniksel Temel Durum (Ground state)**
- 6 3 Boyutlu Lovelock Kuramları
- 7 Açık Problemler
- 8 Referanslar

Genel Cardy Formülü

- Bahsedilen varsayım kullanılmazsa Cardy formülünün en genel hali şu şekilde elde edilebilir:

$$S_{\text{Cardy}} = 2\pi\sqrt{\frac{c_{\text{eff}}^+}{6}\tilde{\Delta}^+} + 2\pi\sqrt{\frac{c_{\text{eff}}^-}{6}\tilde{\Delta}^-}, \quad c_{\text{eff}}^\pm = c^\pm - 24\tilde{\Delta}_0^\pm$$

$\tilde{\Delta}_0^\pm$: \tilde{L}_0^\pm 'in en düşük özdeğerleri

Genel Cardy Formülü

- Bahsedilen varsayım kullanılmazsa Cardy formülünün en genel hali şu şekilde elde edilebilir:

$$S_{\text{Cardy}} = 2\pi\sqrt{\frac{c_{\text{eff}}^+}{6}\tilde{\Delta}^+} + 2\pi\sqrt{\frac{c_{\text{eff}}^-}{6}\tilde{\Delta}^-}, \quad c_{\text{eff}}^\pm = c^\pm - 24\tilde{\Delta}_0^\pm$$

$\tilde{\Delta}_0^\pm$: \tilde{L}_0^\pm 'in en düşük özdeğerleri

- Bu formül dikkatle incelenirse merkezi yükler olmadan yazılabileceği görülür:

Merkezi yükler olmadan Cardy formülü

$$S_{\text{Cardy}} = 4\pi\sqrt{-\tilde{\Delta}_0^+\tilde{\Delta}^+} + 4\pi\sqrt{-\tilde{\Delta}_0^-\tilde{\Delta}^-}$$

Temel Durum?

- Hatırlatma

$$\tilde{\Delta}^{\pm} = \frac{1}{2}(M\ell \pm J)$$

Temel Durum?

- Hatırlatma

$$\tilde{\Delta}^{\pm} = \frac{1}{2}(M\ell \pm J)$$

- En düşük özdeğer şöyle verilmeli:

$$\tilde{\Delta}_0^{\pm} = \frac{1}{2}M_0\ell$$

Formülün doğru olması için $M_0 < 0$ olmalı.

Temel Durum?

- Hatırlatma

$$\tilde{\Delta}^{\pm} = \frac{1}{2}(M\ell \pm J)$$

- En düşük özdeğer şöyle verilmeli:

$$\tilde{\Delta}_0^{\pm} = \frac{1}{2}M_0\ell$$

Formülün doğru olması için $M_0 < 0$ olmalı.

- Her kara delik çözümü için varolduğu kesin olmalı.

Temel Durum?

- Hatırlatma

$$\tilde{\Delta}^{\pm} = \frac{1}{2}(M\ell \pm J)$$

- En düşük özdeğer şöyle verilmeli:

$$\tilde{\Delta}_0^{\pm} = \frac{1}{2}M_0\ell$$

Formülün doğru olması için $M_0 < 0$ olmalı.

- Her kara delik çözümü için varolduğu kesin olmalı.
- Cevap (Correa-Martinez-Troncoso): Solitonlar

Genel Cardy Formülü ile Statik BTZ Kara Deliği

$$ds_b^2 = -\frac{r^2 - r_+^2}{\ell^2} dt_b^2 + \frac{\ell^2}{r^2 - r_+^2} dr^2 + r^2 d\theta_b^2$$

$$\beta = \frac{2\pi\ell^2}{r_+}, \quad M = \frac{r_+^2}{8G\ell^2}, \quad S = \frac{A}{4G} = \frac{\pi r_+}{2G}$$

Genel Cardy Formülü ile Statik BTZ Kara Deliği

$$ds_b^2 = -\frac{r^2 - r_+^2}{\ell^2} dt_b^2 + \frac{\ell^2}{r^2 - r_+^2} dr^2 + r^2 d\theta_b^2$$

$$\beta = \frac{2\pi\ell^2}{r_+}, \quad M = \frac{r_+^2}{8G\ell^2}, \quad S = \frac{A}{4G} = \frac{\pi r_+}{2G}$$

- Çift Wick rotasyonu uygulayalım (Çözüm olacağı kesin):

$$t_b \rightarrow i\ell\theta_s, \quad \theta_b \rightarrow i\frac{t_s}{\ell}$$

$$\text{AdS}_3 \text{ Soliton: } ds_s^2 = -\frac{r^2}{\ell^2} dt_s^2 + \frac{\ell^2}{r^2 - \ell^2} dr^2 + (r^2 - \ell^2) d\theta_s^2$$

Genel Cardy Formülü ile Statik BTZ Kara Deliği

$$ds_b^2 = -\frac{r^2 - r_+^2}{\ell^2} dt_b^2 + \frac{\ell^2}{r^2 - r_+^2} dr^2 + r^2 d\theta_b^2$$

$$\beta = \frac{2\pi\ell^2}{r_+}, \quad M = \frac{r_+^2}{8G\ell^2}, \quad S = \frac{A}{4G} = \frac{\pi r_+}{2G}$$

- Çift Wick rotasyonu uygulayalım (Çözüm olacağı kesin):

$$t_b \rightarrow i\ell\theta_s, \quad \theta_b \rightarrow i\frac{t_s}{\ell}$$

$$\text{AdS}_3 \text{ Soliton: } ds_s^2 = -\frac{r^2}{\ell^2} dt_s^2 + \frac{\ell^2}{r^2 - \ell^2} dr^2 + (r^2 - \ell^2) d\theta_s^2$$

- Radyal koordinatı tekrar tanımlayalım: $r^2 - \ell^2 \rightarrow r^2$:

$$ds^2 = -\left[1 + \frac{r^2}{\ell^2}\right] dt^2 + \left[1 + \frac{r^2}{\ell^2}\right]^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2$$

Global statik koordinatlarda AdS_3 uzay-zamanı

Genel Cardy Formülü ile Statik BTZ Kara Deliği

- Kütle bulmak için şöyle bir kısa yol mümkün:

$$ds_b^2 = -\frac{r^2 - r_+^2}{\ell^2} dt_b^2 + \frac{\ell^2}{r^2 - r_+^2} dr^2 + r^2 d\theta_b^2, \quad M = \frac{r_+^2}{8G\ell^2}$$

$$ds^2 = -\left[1 + \frac{r^2}{\ell^2}\right] dt^2 + \left[1 + \frac{r^2}{\ell^2}\right]^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2$$

Statik BTZ kara deliğinden global AdS₃ uzay-zamanına $r_+^2 \rightarrow -\ell^2$ olarak gidebiliyoruz. Bu durumda

$$M_0 = -\frac{1}{8G}$$

olmalıdır.

Genel Cardy Formülü ile Statik BTZ Kara Deliği

- Statik kara delikler için genel Cardy formülü:

$$S_{\text{Cardy}} = 4\pi\sqrt{-M_0M}$$

Genel Cardy Formülü ile Statik BTZ Kara Deliği

- Statik kara delikler için genel Cardy formülü:

$$S_{\text{Cardy}} = 4\pi\sqrt{-M_0M}$$

- Soliton kütlesi M_0 ve kara delik kütlesi M 'i bu formülde kullanırsak

$$S_{\text{Cardy}} = S$$

buluruz.

Genel Cardy Formülü ile Statik BTZ Kara Deliği

- Statik kara delikler için genel Cardy formülü:

$$S_{\text{Cardy}} = 4\pi\sqrt{-M_0M}$$

- Soliton kütlesi M_0 ve kara delik kütlesi M 'i bu formülde kullanırsak

$$S_{\text{Cardy}} = S$$

buluruz.

- Genel Cardy formülü Strominger'in sonucuna denk olduğu gibi daha genel durumlarda da kullanılabilir. Çünkü her kara delik çözümünün kendine ait soliton çözümü temel durum olarak düşünülebilir.

Plan

- 1 Konformal Alan Kuramları
- 2 AdS Uzay-zamanı ve AdS/KAK Dualitesi
- 3 AdS₃ Uzay-zamanında Kütle Çekimi
- 4 Strominger'ın Mikroskobik Entropi Türetimi
- 5 Kara Delikler için Kuantum Mekaniksel Temel Durum (Ground state)
- 6 3 Boyutlu Lovelock Kuramları**
- 7 Açık Problemler
- 8 Referanslar

Lovelock Kuramları

- Genel görelilik kuramının en önemli özellikleri:
 - 1 İkinci derece alan denklemleri
 - 2 Kütlesiz spin-2 graviton
 - 3 Kara delik çözümüne sahip olması

Lovelock Kuramları

- Genel görelilik kuramının en önemli özellikleri:
 - 1 İkinci derece alan denklemleri
 - 2 Kütlesiz spin-2 graviton
 - 3 Kara delik çözümüne sahip olması
- Bu özelliklere sahip en genel teori:

$$\mathcal{L}_m = \frac{1}{2^m} \delta^{\mu_1 \nu_1 \dots \mu_m \nu_m}_{\rho_1 \sigma_1 \dots \rho_m \sigma_m} R^{\rho_1 \sigma_1}_{\mu_1 \nu_1} \dots R^{\rho_m \sigma_m}_{\mu_m \nu_m}$$

$d < 2m$: Katkı yok

$d = 2m$: Kritik boyut \rightarrow Topolojik değişmez (Euler invariantı)

$d > 2m$: GGK'ından farklı bir teori

$d = 4$ 'te genel görelilik kurami eşsiz!

3 Boyutlu Lovelock Kuramları

- Kaluza-Klein indirilmesi yapılırken Newton sabitinin sıfıra gittiği bir regülarizasyon uygulanırsa daha düşük boyutlarda bir skaler-tensor teori bulunabilir:

$$I = \frac{1}{16\pi G} \int d^3x \sqrt{-g} \left[R + \frac{2}{L^2} + \alpha_2 L^2 \mathcal{L}_2 + \alpha_3 L^4 \mathcal{L}_3 \right]$$

$$\mathcal{L}_2 = 4G^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - 4X \square \phi + 2X^2,$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3 = & -48R^{\mu\nu} \phi_{,\mu\nu} X - 48R^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} X + 24RX \square \phi + 6RX^2 \\ & + 96\phi_{,\mu\nu} \phi^{,\mu} \phi^{,\nu} \square \phi + 48\phi_{,\mu\nu} \phi^{,\mu\nu} \square \phi - 24\phi_{,\mu\nu} \phi^{,\mu\nu} X \\ & - 144\phi_{,\mu\nu} \phi^{,\mu} \phi^{,\nu} X - 96\phi^{,\mu} \phi^{,\nu} \phi_{,\mu\rho} \phi^{,\rho}_{,\nu} - 32\phi^{,\mu\nu} \phi_{,\mu\rho} \phi^{,\rho}_{,\nu} \\ & - 16(\square \phi)^3 + 24X(\square \phi)^2 - 24X^3 \end{aligned}$$

$$\phi_{,\mu} \equiv \partial_{\mu} \phi, \quad \phi_{,\mu\nu} \equiv \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} \phi, \quad \square \phi \equiv g^{\mu\nu} \phi_{,\mu\nu}, \quad X \equiv g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu}$$

3 Boyutlu Lovelock Kuramları

- Kaluza-Klein indirilmesi yapılırken Newton sabitinin sıfıra gittiği bir regülarizasyon uygulanırsa daha düşük boyutlarda bir skaler-tensor teori bulunabilir:

$$I = \frac{1}{16\pi G} \int d^3x \sqrt{-g} \left[R + \frac{2}{L^2} + \alpha_2 L^2 \mathcal{L}_2 + \alpha_3 L^4 \mathcal{L}_3 \right]$$

$$\mathcal{L}_2 = 4G^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - 4X \square \phi + 2X^2,$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3 = & -48R^{\mu\nu} \phi_{,\mu\nu} X - 48R^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} X + 24RX \square \phi + 6RX^2 \\ & + 96\phi_{,\mu\nu} \phi^{,\mu} \phi^{,\nu} \square \phi + 48\phi_{,\mu\nu} \phi^{,\mu\nu} \square \phi - 24\phi_{,\mu\nu} \phi^{,\mu\nu} X \\ & - 144\phi_{,\mu\nu} \phi^{,\mu} \phi^{,\nu} X - 96\phi^{,\mu} \phi^{,\nu} \phi_{,\mu\rho} \phi^{,\rho}_{,\nu} - 32\phi^{,\mu\nu} \phi_{,\mu\rho} \phi^{,\rho}_{,\nu} \\ & - 16(\square \phi)^3 + 24X(\square \phi)^2 - 24X^3 \end{aligned}$$

$$\phi_{,\mu} \equiv \partial_{\mu} \phi, \quad \phi_{,\mu\nu} \equiv \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} \phi, \quad \square \phi \equiv g^{\mu\nu} \phi_{,\mu\nu}, \quad X \equiv g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu}$$

- Bizim için önemli yanı: 2 farklı kara delik çözümü var.

BTZ Kara Deliği

$$ds_b^2 = \frac{r^2}{L^2} dt_b^2 + \frac{L^2}{r^2 f_b} dr^2 + r^2 d\theta_b^2, \quad \ell = \frac{L}{\sqrt{f_\infty}} : \text{AdS yarıçapı}$$

$$f_b = f_\infty \left[1 - \frac{r_+^2}{r^2} \right], \quad \phi = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\alpha_2}{2\alpha_3}} \log \left[\frac{r - \sqrt{r^2 - r_+^2}}{\ell} \right]$$

$$f_\infty = \frac{\alpha_2^3 + 972\alpha_3^2}{54\alpha_3 (\alpha_2^2 + 18\alpha_3)}$$

$$M = \left[1 + \frac{\alpha_2^2}{18\alpha_3} \right] \frac{r_+^2}{8G\ell^2}, \quad S = \left[1 + \frac{\alpha_2^2}{18\alpha_3} \right] \frac{\pi r_+}{2G}$$

$$t_b \rightarrow iL\theta_s, \quad \theta_b \rightarrow i\frac{t_s}{L}$$

$$ds_s^2 = -\frac{r^2}{L^2} dt_s^2 + \frac{L^2}{r^2 f_s} dr^2 + r^2 f_s d\theta_s^2$$

$$f_s = f_\infty \left[1 - \frac{r_+^2}{r^2} \right], \quad \phi = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\alpha_2}{2\alpha_3}} \log \left[\frac{r - \sqrt{r^2 - r_+^2}}{\ell} \right], \quad r_+ = \frac{L}{\sqrt{f_\infty}} = \ell$$

$$M_0 = -\frac{1}{8G} \left(1 + \frac{\alpha_2^2}{18\alpha_3} \right), \quad S_0 = 0$$

$$S_{\text{Cardy}} = S$$

“Yeni” Bir Kara Delik Çözümü

$$1 - f_b - \alpha_2 f_b^2 + 6\alpha_3 f_b^3 = \left(\frac{r_+}{r}\right)^2, \quad \phi = \log\left(\frac{r}{\ell}\right)$$

$$1 - f_\infty - \alpha_2 f_\infty^2 + 6\alpha_3 f_\infty^3 = 0$$

$$M = \frac{r_+^2}{8f_\infty G \ell^2}, \quad S = \frac{\pi r_+}{2G}$$

$$1 - f_s - \alpha_2 f_s^2 + 6\alpha_3 f_s^3 = \left(\frac{r_+}{r}\right)^2, \quad \phi = \log\left(\frac{r}{\ell}\right), \quad r_+ = \sqrt{f_\infty} L$$

$$M_0 = -\frac{f_\infty}{8G}, \quad S_0 = 0$$

$$S_{\text{Cardy}} = S$$

Standart Cardy Formülünün Kontrolü

- Asimtotik simetri cebiri yerine teorinin merkezi yükleri holografik c-teoremi yada anomali hesabı ile bulunabilir:

$$c^{\pm} = \frac{3\ell}{2G} (1 - 2\alpha_2 f_{\infty} + 6\alpha_3 f_{\infty}^2)$$

Standart Cardy Formülünün Kontrolü

- Asimtotik simetri cebiri yerine teorinin merkezi yükleri holografik c-teoremi yada anomali hesabı ile bulunabilir:

$$c^{\pm} = \frac{3\ell}{2G} (1 - 2\alpha_2 f_{\infty} + 6\alpha_3 f_{\infty}^2)$$

- Standart Cardy formülü iki kara delik çözümü için de başarısız.

Standart Cardy Formülünün Kontrolü

- Asimtotik simetri cebiri yerine teorinin merkezi yükleri holografik c-teoremi yada anomali hesabı ile bulunabilir:

$$c^{\pm} = \frac{3\ell}{2G} (1 - 2\alpha_2 f_{\infty} + 6\alpha_3 f_{\infty}^2)$$

- Standart Cardy formülü iki kara delik çözümü için de başarısız.

En Önemli Sonuç

Kara delik entropisinin mikroskobik türetimi için standart Cardy formülü yerine merkezi yuklerden bagimsiz Cardy formülü kullanılmalı. Temel durum statik kara delik cüzümünden türetilen soliton çözümü ile tasvir edilmeli.

Plan

- 1 Konformal Alan Kuramları
- 2 AdS Uzay-zamanı ve AdS/KAK Dualitesi
- 3 AdS₃ Uzay-zamanında Kütle Çekimi
- 4 Strominger'ın Mikroskopik Entropi Türetimi
- 5 Kara Delikler için Kuantum Mekaniksel Temel Durum (Ground state)
- 6 3 Boyutlu Lovelock Kuramları
- 7 Açık Problemler
- 8 Referanslar

- $d = 3$ 'te dönen ve elektrik yüklü kara delikler

Açık Problemler

- $d = 3$ 'te dönen ve elektrik yüklü kara delikler
- $d = 4, 5, 6$ 'da olay ufku düzlemsel olan kara delikler

Açık Problemler

- $d = 3$ 'te dönen ve elektrik yüklü kara delikler
- $d = 4, 5, 6$ 'da olay ufku düzlemsel olan kara delikler
- AdS'ten daha genel asimtotik yapıların incelenmesi. Örnek: Lifshitz

Açık Problemler

- $d = 3$ 'te dönen ve elektrik yüklü kara delikler
- $d = 4, 5, 6$ 'da olay ufku düzlemsel olan kara delikler
- AdS'ten daha genel asimtotik yapıların incelenmesi. Örnek: Lifshitz
- Skaler bir alanın konformal olarak etkileşimi ile elde edilen düzlemsel kara delik çözümleri

Açık Problemler

- $d = 3$ 'te dönen ve elektrik yüklü kara delikler
- $d = 4, 5, 6$ 'da olay ufku düzlemsel olan kara delikler
- AdS'ten daha genel asimtotik yapıların incelenmesi. Örnek: Lifshitz
- Skaler bir alanın konformal olarak etkileşimi ile elde edilen düzlemsel kara delik çözümleri
- Manyetik yüklü kara delikler

Açık Problemler

- $d = 3$ 'te dönen ve elektrik yüklü kara delikler
- $d = 4, 5, 6$ 'da olay ufku düzlemsel olan kara delikler
- AdS'ten daha genel asimtotik yapıların incelenmesi. Örnek: Lifshitz
- Skaler bir alanın konformal olarak etkileşimi ile elde edilen düzlemsel kara delik çözümleri
- Manyetik yüklü kara delikler
- Lineer olmayan elektrodinamik etkileşimlerle elektrik yüklenen kara delikler

Plan

- 1 Konformal Alan Kuramları
- 2 AdS Uzay-zamanı ve AdS/KAK Dualitesi
- 3 AdS₃ Uzay-zamanında Kütle Çekimi
- 4 Strominger'ın Mikroskobik Entropi Türetimi
- 5 Kara Delikler için Kuantum Mekaniksel Temel Durum (Ground state)
- 6 3 Boyutlu Lovelock Kuramları
- 7 Açık Problemler
- 8 Referanslar**

- BTZ kara deliği: [arXiv/hep-th:9204099]
- Strominger'ın makalesi: [arXiv/hep-th:9712251]
- Cardy formülünün pedagojik bir türetimi: [arXiv/hep-th:9806026]
- Düşük boyutlarda Lovelock kuramının türetimi ve kara delik çözümleri: [arXiv:2203.01811]
- Düşük boyutlarda Lovelock kuramının kara delik çözümlerinin termodinamiği: [arXiv:2308.00620]
- 3 boyutlu Lovelock kuramında holografik c-teoremi ve merkezi yükler: [arXiv:2211.12450]
- 3 boyutlu Lovelock kuramında kara delik entropisinin mikroskopik türetimi: Eylül ayında arXiv'da
- Sorularınız için: alkac@mail.com