

Versuch

# **Hohlraumresonatoren**

Tiefere Einsichten in das Phänomen physikalischer  
Resonanzen

Fortgeschrittenenpraktikum im Studiengang Physik  
Universität Hamburg

Wolfgang Hillert, Velizar Miltchev

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Theoretische Grundlagen</b>	<b>2</b>
1.1	Hohlraumresonatoren . . . . .	2
1.2	Das Cavity als Schwingkreis . . . . .	12
1.3	Der komplexe Reflexionsfaktor . . . . .	17
1.4	Messung von $ \rho $ . . . . .	19
1.5	Vektorielle Messung des Reflexionsfaktors . . . . .	21
1.6	Störkörpermessungen . . . . .	32
1.7	Feldplots einiger Resonatormoden . . . . .	37
<b>2</b>	<b>Versuchsdurchführung</b>	<b>42</b>
2.1	Experimenteller Aufbau . . . . .	42
2.2	Der Vektorielle Netzwerkanalysator . . . . .	42
2.3	VNA Kalibrierung . . . . .	44
2.4	Messung des Reflexionspektrums . . . . .	45
2.5	Skalare Messung von $ \rho $ . . . . .	46
2.6	Vektorielle Messung des Reflexionsfaktors . . . . .	47
2.7	Störkörpermessung . . . . .	49

# 1 Theoretische Grundlagen

## 1.1 Hohlraumresonatoren

Wir leiten die Eigenschwingungen (resonanten Moden) eines Hohlraumresonators aus den Maxwell'schen Gleichungen ab. Dazu behandeln wir zunächst die Wellenausbreitung in zylindrischen Hohlleitern und führen die unterschiedlichen Ausbreitungsformen von Wellen (Hohlleitermoden) ein. Der Übergang zu zylindrischen Hohlraumresonatoren gelingt danach durch ein Verschließen des Hohlleiters durch leitende Wände, wodurch in longitudinaler Richtung zusätzliche Randbedingungen entstehen und stehende Wellen auftreten.

### Wellenausbreitung und Maxwell'sche Gleichungen

Startpunkt sind die Maxwell'schen Gleichungen in differentieller Form, die sich für Vakuum (hier sind keine Ladungsträger vorhanden!) mit Hilfe von  $\epsilon_0$  und  $\mu_0$  durch die  $E$ - und  $H$ -Felder ausdrücken lassen:

$rot \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	Vakuum $\mapsto$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu_0 \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$
$div \vec{D} = \rho$	Vakuum $\mapsto$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$
$rot \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	Vakuum $\mapsto$	$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \epsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
$div \vec{B} = 0$	Vakuum $\mapsto$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0$

Bilden wir nun die Rotation der ersten (bzw. der dritten) Gleichung, ersetzen den Ausdruck  $\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$  (bzw.  $\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ ) durch die zeitliche Ableitung der dritten (bzw. der ersten) Gleichung und nutzen die Operatoridentität

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) - \Delta \vec{a},$$

so erhalten wir unter Ausnützung der Divergenzbeziehungen (Maxwell-Gleichung zwei bzw. vier) die Differentialgleichungen des elektrischen und magnetischen Felds für eine Wellenausbreitung im Vakuum:

$$\Delta \vec{E}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta \vec{H}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0$$

mit  $c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$

Betrachten wir ausschließlich Wellen einer bestimmten Frequenz  $\omega$ , können wir die Zeitabhängigkeit explizit durch

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) \cdot e^{i\omega t}, \quad \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}(\vec{r}) \cdot e^{i\omega t}$$

ausdrücken und die Wellengleichung durch Einsetzen vereinfachen:

$$\Delta \vec{E}(\vec{r}) + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}(\vec{r}) = 0$$

$$\Delta \vec{H}(\vec{r}) + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{H}(\vec{r}) = 0$$

### Hohlleiter

Wir beginnen mit der Betrachtung allgemeiner, in  $z$ -Richtung ausgerichteter Hohlleiter, die damit auch die Wellenausbreitung auf die  $z$ -Richtung festlegen.

Mit dem Ansatz  $\vec{E} = \vec{E}(x, y) \cdot e^{i(\omega t - kz)}$  und der Aufteilung  $\Delta = \Delta_{\perp} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  ergibt sich

für die longitudinalen Felder:

$$\Delta_{\perp} E_z + k_c^2 E_z = 0$$

$$\Delta_{\perp} H_z + k_c^2 H_z = 0$$

mit  $\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = k_c^2$

(Dispersionsrelation des Hohlleiters)

Die Größe  $k_c$  wird auch als kritische Wellenzahl bezeichnet und ist eine Kenngröße des Hohlleiters – wie wir im Folgenden noch sehen werden.

Zur Berechnung der transversalen Felder nutzen wir die erste (bzw. dritte) Maxwellsche Gleichung. **Es wird sich herausstellen, dass eine Kenntnis der longitudinalen Felder  $E_z$  und  $H_z$  ausreicht und die zugehörigen transversalen Felder  $\vec{E}_{\perp}$  und  $\vec{H}_{\perp}$  aus den longitudinalen berechnet werden können.** So erhalten wir z. B. für das  $E$ -Feld

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla} \times \vec{E}_\perp)_x &= -\frac{\partial E_y}{\partial z} = +ikE_y & \Rightarrow (\vec{\nabla} \times \vec{E}_\perp)_\perp &= ik\vec{E}_\perp \times \hat{e}_z \\ (\vec{\nabla} \times \vec{E}_\perp)_y &= +\frac{\partial E_x}{\partial z} = -ikE_x \\ \vec{\nabla} \times (E_z \cdot \hat{e}_z) &= \vec{\nabla} E_z \times \hat{e}_z = \vec{\nabla}_\perp E_z \times \hat{e}_z = \vec{\nabla}_\perp \times (E_z \cdot \hat{e}_z) \end{aligned}$$

Kombinieren wir diese zwei Gleichungen, ergibt sich

$$(\vec{\nabla} \times \vec{E})_\perp = (ik\vec{E}_\perp + \vec{\nabla}_\perp E_z) \times \hat{e}_z$$

und völlig analog  $(\vec{\nabla} \times \vec{H})_\perp = (ik\vec{H}_\perp + \vec{\nabla}_\perp H_z) \times \hat{e}_z$ .

Aus der ersten und dritten Maxwellschen Gleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} (ik\vec{E}_\perp + \vec{\nabla}_\perp E_z) \times \hat{e}_z &= -i\omega\mu_0\vec{H}_\perp & \text{oder} & & ik\vec{E}_\perp + \vec{\nabla}_\perp E_z &= i\omega\mu_0\vec{H}_\perp \times \hat{e}_z \\ (ik\vec{H}_\perp + \vec{\nabla}_\perp H_z) \times \hat{e}_z &= i\omega\varepsilon_0\vec{E}_\perp & & & ik\vec{H}_\perp + \vec{\nabla}_\perp H_z &= -i\omega\varepsilon_0\vec{E}_\perp \times \hat{e}_z \end{aligned}$$

was sich nach etwas Rechnen (Einsetzen über Kreuz) zu folgenden Beziehungen umwandeln lässt:

$$\begin{aligned} ik_c^2 \vec{E}_\perp &= k\vec{\nabla}_\perp E_z + \omega\mu_0 \vec{\nabla}_\perp H_z \times \hat{e}_z \\ ik_c^2 \vec{H}_\perp &= k\vec{\nabla}_\perp H_z - \omega\varepsilon_0 \vec{\nabla}_\perp E_z \times \hat{e}_z \end{aligned}$$

Wir können die verschiedenen möglichen Wellen wie folgt klassifizieren:

a) Fall  $k_c^2 = 0$ :

Phasengeschwindigkeit aus der Dispersionsrelation:

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = c$$

Impedanz über  $\zeta = \frac{E}{H}$ , damit  $\vec{\nabla}_\perp E_z = -\zeta \cdot \vec{\nabla}_\perp H_z \times \hat{e}_z$ :

$$\zeta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$$

- 1.)  $\vec{\nabla}_\perp E_z \neq 0, \vec{\nabla}_\perp H_z \neq 0$ : HE oder EH Hybrid-Wellen (werden zur Ablenkung geladener Teilchen in RF Separatoren benutzt)
- 2.)  $\vec{\nabla}_\perp E_z = 0$  and  $\vec{\nabla}_\perp H_z = 0$ : **transversale TEM Wellen**

b) Fall  $k_c^2 \neq 0$ :

**Keine Ausbreitung für  $\omega \leq c \cdot k_c$ : evaneszente Wellen  $\leftrightarrow$  "cut-off"**

Phasengeschwindigkeit aus Dispersionsrelation:

$$v_{ph} = c \cdot \sqrt{1 + \frac{k_c^2}{k^2}} > c$$

Die Impedanz hängt von der Ausbreitungsmode ab:

1.)  $E_z = 0$ : TE (transversal elektrische) oder H (weil  $H_z \neq 0$ ) Wellen

Impedanz über  $ik\vec{E}_\perp = -i\omega\mu_0\vec{H}_\perp \times \hat{e}_z$ :

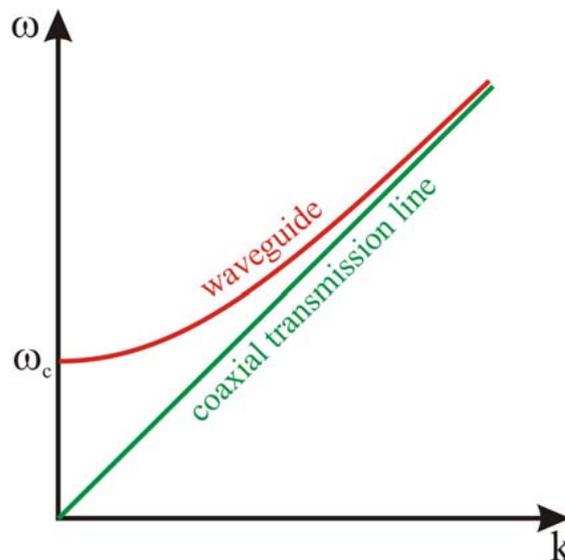
$$Z_0 = \frac{E_\perp}{H_\perp} = \mu_0 \frac{\omega}{k}$$

2.)  $H_z = 0$ : TM (transversal magnetische) oder E (weil  $E_z \neq 0$ ) Wellen

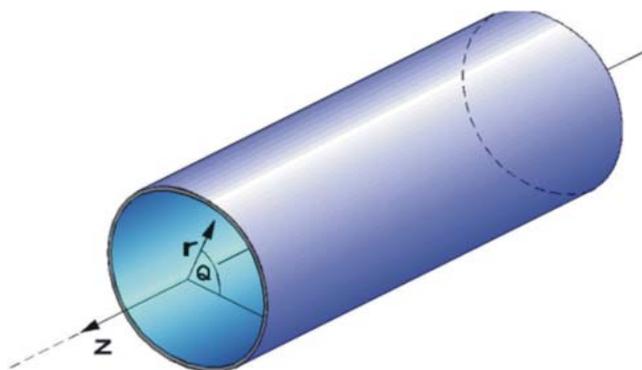
Impedanz über  $ik\vec{H}_\perp \times \hat{e}_z = (i\omega\epsilon_0 + \sigma)\vec{E}_\perp$ :

$$Z_0 = \frac{k}{\omega\epsilon_0}$$

Verbunden mit der kritischen Wellenzahl ist eine kritische Frequenz  $\omega_c = k_c \cdot c$ , unterhalb derer keine Wellenausbreitung im Hohlleiter stattfindet. Die Dispersion im Hohlleiter weicht daher von der im Vakuum oder einem Koaxialkabel (TEM-Wellen) für kleine Frequenzen deutlich ab:



Betrachten wir nun im Folgenden zylindrische Hohlleiter mit Innenradius  $a$ :



Die longitudinalen Felder müssen die Wellengleichung lösen:

$$\underbrace{\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)}_{=\Delta_{\perp}} E_z + k_c^2 E_z = 0$$

$$=\Delta_{\perp}$$

$$\underbrace{\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)}_{=\Delta_{\perp}} H_z + k_c^2 H_z = 0$$

Separation des  $\varphi$ -abhängigen Anteils

$$E_z(r, \varphi) = R_E(r) \cdot \theta_E(\varphi), \quad H_z(r, \varphi) = R_H(r) \cdot \theta_H(\varphi)$$

$$\Rightarrow \frac{r^2}{R} \cdot \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{r}{R} \frac{dR}{dr} + k_c^2 r^2 = -\frac{1}{\theta} \frac{d^2 \theta}{d\varphi^2} = m^2$$

ergibt zwei Differentialgleichungen für die Anteile der longitudinalen Komponente und als Lösung die trigonometrischen Funktionen für den Winkelanteil und die Bessel- bzw. Neumannfunktion für den radialen Anteil:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \theta}{d\varphi^2} + m^2 \theta &= 0 \\ \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left( k_c^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R &= 0 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \theta(\varphi) &= A \cdot \cos(m\varphi) + B \cdot \sin(m\varphi) \\ R(r) &= C \cdot J_m(k_c \cdot r) + D \cdot N_m(k_c \cdot r) \end{aligned}$$

Mit  $\vec{\nabla}_{\perp} = \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{e}_{\varphi} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}$  erhalten wir für die transversalen Felder:

$$\begin{aligned} ik_c^2 \vec{E}_{\perp} &= k \left\{ \frac{\partial E_z}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} \hat{e}_{\varphi} \right\} - \omega \mu_0 \left\{ \frac{\partial H_z}{\partial r} \hat{e}_{\varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \hat{e}_r \right\} \\ ik_c^2 \vec{H}_{\perp} &= k \left\{ \frac{\partial H_z}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \hat{e}_{\varphi} \right\} + \omega \varepsilon_0 \left\{ \frac{\partial E_z}{\partial r} \hat{e}_{\varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} \hat{e}_r \right\} \end{aligned}$$

Die möglichen Feldverteilungen werden durch die Randbedingungen an den Wänden des Hohlleiters weiter eingeschränkt:

- $E_{\varphi} = 0; E_z = 0$  für  $r = a$  (verschwindende Tangentialkomponenten)
- $H_r = 0$  für  $r = a$  (verschwindende Normalkomponenten)

Hiermit wird einem folgender Ansatz für das magnetische (im Fall der TE-Moden) bzw. das elektrische Feld (im Fall der TM-Moden) nahegelegt:

**TE- oder H-Wellen mit  $E_z = 0$ :**

$H_z = H_{mn} \cdot J_m(k_c \cdot r) \cdot \cos(m\varphi)$ , wobei  $J'_m(k_c a) = 0$  gelten muss und  $n$  angibt, um welche Nullstelle  $j'_{mn}$  es sich dabei handelt. Mit  $n = 1, 2, 3, \dots$  und  $m = 0, 1, 2, \dots$  gilt näherungsweise folgende **Dispersionsrelation für TE-Wellen**:

$$k_c^2 + k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad \text{wobei} \quad (k_c a)^2 \approx \left( n + \frac{2m-3}{4} \right)^2 \pi^2 - \frac{4m^2 + 3}{4}$$

**Wir erhalten damit für die transversalen Felder der TE-Wellen:**

$$\begin{aligned} E_r &= i \frac{\omega \mu_0}{k_c} \frac{m}{k_c r} \cdot J_m(k_c r) \cdot \sin(m\varphi) H_{mn} & H_r &= -i \frac{k}{k_c} \cdot J'_m(k_c r) \cdot \cos(m\varphi) H_{mn} \\ E_\varphi &= i \frac{\omega \mu_0}{k_c} \cdot J'_m(k_c r) \cos(m\varphi) H_{mn} & H_\varphi &= i \frac{k}{k_c} \frac{m}{k_c r} \cdot J_m(k_c r) \cdot \sin(m\varphi) H_{mn} \end{aligned}$$

Die Mode mit der kleinsten Frequenz (Fundamentalmode) ist die  $TE_{11}$  mit  $m > 0$ , was durch die Forderung verschwindender Normalkomponenten von H bedingt ist! Allgemein gilt für die Cut-Off-Frequenzen  $\omega_{mn} = j'_{mn} \cdot c / a$ .

**TM- oder E-Wellen mit  $H_z = 0$ :**

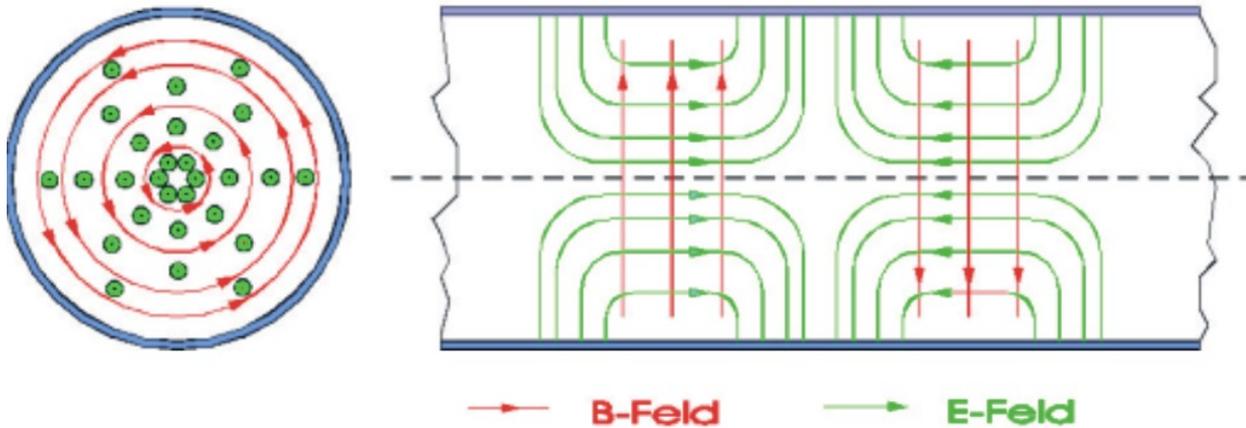
$E_z = E_{mn} \cdot J_m(k_c \cdot r) \cdot \cos(m\varphi)$ , wobei  $J_m(k_c a) = 0$  gelten muss und  $n$  angibt, um welche Nullstelle  $j_{mn}$  es sich dabei handelt. Mit  $n = 1, 2, 3, \dots$  und  $m = 0, 1, 2, \dots$  gilt Näherungsweise folgende **Dispersionsrelation für TM-Wellen**:

$$k_c^2 + k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad \text{mit} \quad (k_c a)^2 \approx \left( n + \frac{2m-1}{4} \right)^2 \pi^2 - \frac{4m^2 - 1}{4}$$

**Wir erhalten damit für die transversalen Felder der TM-Wellen:**

$$\begin{aligned} E_r &= -i \frac{k}{k_c} \cdot J'_m(k_c r) \cdot \cos(m\varphi) E_{mn} & H_r &= i \frac{\omega \epsilon_0}{k_c} \frac{m}{k_c r} \cdot J_m(k_c r) \cdot \sin(m\varphi) E_{mn} \\ E_\varphi &= i \frac{k}{k_c} \frac{m}{k_c r} \cdot J_m(k_c r) \cdot \sin(m\varphi) E_{mn} & H_\varphi &= i \frac{\omega \epsilon_0}{k_c} \cdot J'_m(k_c r) \cos(m\varphi) E_{mn} \end{aligned}$$

Die Fundamentalmode ist die  $TM_{01}$  mit  $m=0$  und  $n=1$ ,  $E_\varphi = H_r = 0$ :



Die  $TM_{01}$  wird in Linearbeschleunigern und Beschleunigungsresonatoren zur Beschleunigung geladener ultrarelativistischer Teilchen verwendet.

Für die Cut-Off-Frequenzen gilt:  $\omega_{mn} = j_{mn} \cdot c/a$

### Eigenmoden zylindrischer Resonatoren

Fügen wir in den Hohlleiter eine senkrecht zur  $z$ -Richtung stehende leitende Platte ein, wird die einlaufende Welle vollständig reflektiert und wir erhalten eine stehende Welle. Dies ändert die Abhängigkeit der Felder in  $z$ -Richtung:

$$a \cdot e^{ikz} \rightarrow A \cdot \sin(kz + \varphi_0)$$

An den Knotenebenen können daher ohne Veränderung der Feldverteilung leitende Platten eingefügt werden. Dies führt zu einem zylindrischen Hohlraumresonator, bestehend aus einem Hohlleiter der Länge  $l$ , der an seinen beiden Enden durch leitende Platten verschlossen ist. Für die longitudinalen Randbedingungen ist daher  $k = p \cdot \pi/l$  zu fordern. Mit den o. a. Hohlleiter-Eigenmoden ergeben sich damit folgende longitudinale Felder:

**TE<sub>mnp</sub>-Moden:**  $H_z = H_{mn} \cdot J_m(k_c r) \cdot \cos(m\varphi) \cdot \sin(p\pi/l \cdot z) \cdot e^{i\omega_{mnp}t}$

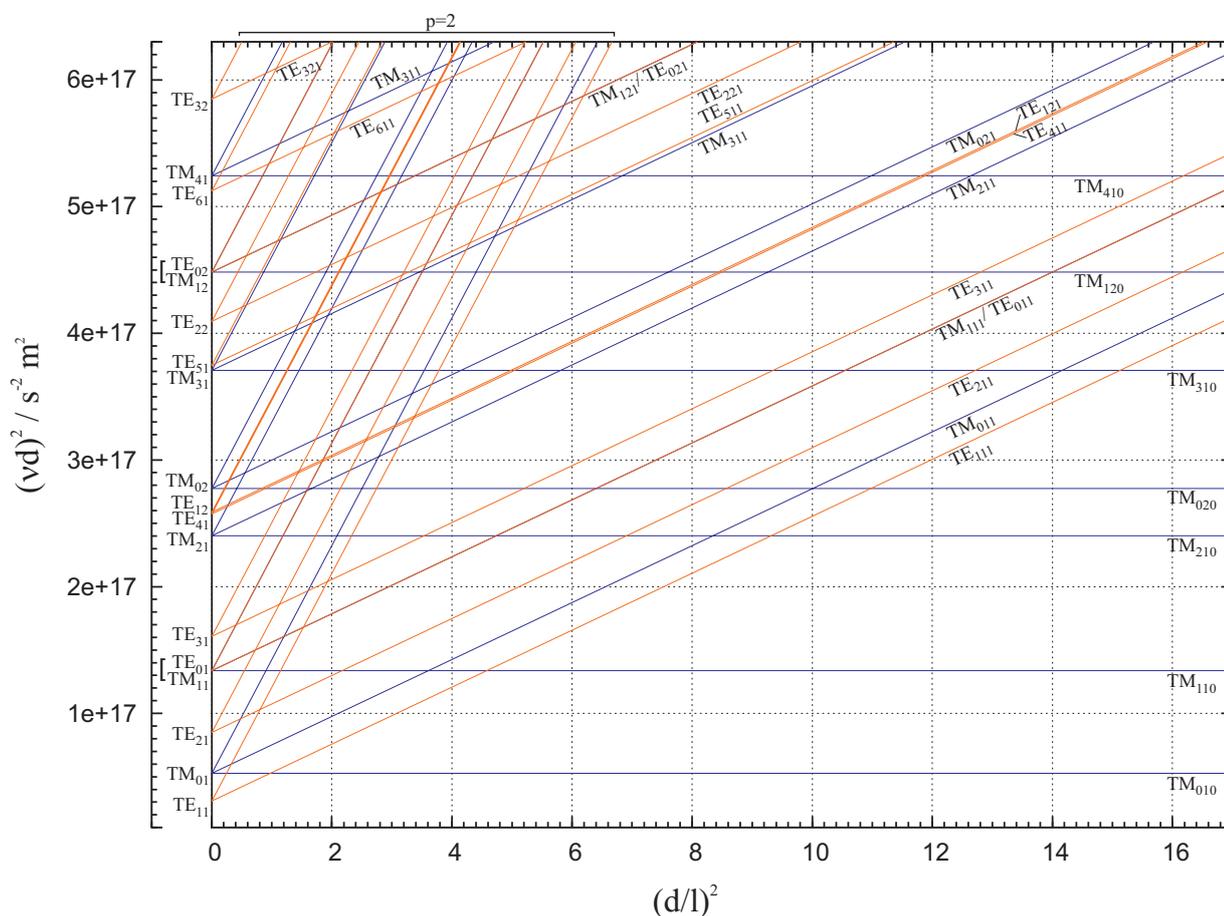
**TM<sub>mnp</sub>-Moden:**  $E_z = E_{mn} \cdot J_m(k_c r) \cdot \cos(m\varphi) \cdot \cos(p\pi/l \cdot z) \cdot e^{i\omega_{mnp}t}$

**Für die Resonanzfrequenzen gilt:**  $\omega_{mnp} = c \cdot \sqrt{(j_{mn}^{(l)}/a)^2 + (p\pi/l)^2}$

Stellt man die Formel für die Resonanzfrequenzen ein wenig um, so erhält man die folgende Geradengleichung, wobei  $j_{mn}^{(l)}$  die jeweilige Nullstelle der Besselfunktion bzw. ihrer Ableitung bezeichnet:

$$(dv)^2 = \left( \frac{c j_{mn}^{(l)}}{\pi} \right)^2 + \left( \frac{c}{2} \right)^2 p^2 \left( \frac{d}{l} \right)^2$$

Dabei wurde der Durchmesser  $d = 2 \cdot a$  des Resonators eingeführt. Trägt man die Geraden der verschiedenen Moden in ein Diagramm ein, so erhält man eine sogenannte **Modenkarte** (hier für  $p \leq 2$ ):



Aus ihr lässt sich die Anordnung der verschiedenen Moden eines Resonators für ein gegebenes Verhältnis von Durchmesser zu Länge ablesen. Aus den Ordinatenwerten lassen sich deren Frequenzen bestimmen.

Die zur expliziten Berechnung der Resonanzfrequenzen erforderlichen Nullstellen der Besselfunktionen bzw. deren jeweiliger erster Ableitung finden sich in den folgenden beiden Tabellen:

**Nullstellen von  $J_m(x)$ :**

<b>n</b>	$j_{0n}$	$j_{1n}$	$j_{2n}$	$j_{3n}$	$j_{4n}$	$j_{5n}$
	-	0	0	0	0	0
1	2,40482	3,83171	5,13562	6,38016	7,58834	8,77148
2	5,52007	7,01559	8,41724	9,76102	11,06471	12,33860
3	8,65372	10,17347	11,61984	13,01520	14,37254	15,70017
4	11,79153	13,32369	14,79595	16,22347	17,61597	18,98013
5	14,93091	16,47063	17,95982	19,40942	20,82693	22,21780

**Nullstellen von  $J'_m(x)$ :**

<b>n</b>	$j'_{0n}$	$j'_{1n}$	$j'_{2n}$	$j'_{3n}$	$j'_{4n}$	$j'_{5n}$
	0	-	0	0	0	0
1	3,83170	1,84118	3,05424	4,20119	5,31755	6,41562
2	7,01558	5,33144	6,70613	8,01524	9,28240	10,51986
3	10,17346	8,53632	9,96947	11,34592	12,68191	13,98719
4	13,32369	11,70600	13,17037	14,58585	15,96411	17,31284
5	16,47063	14,86359	16,34752	17,78875	19,19603	20,57551

Die jeweils niedrigste Nullstelle (außer der trivialen) ist farblich markiert, aus ihr berechnet sich die jeweilige Fundamentalmode der beiden Modenklassen. Die Gleichheit der Nullstellen  $j'_{0n}$  und  $j_{1n}$  deutet darauf hin, dass die Ableitung der Besselfunktion nullter Ordnung mit der Besselfunktion erster Ordnung übereinstimmt:

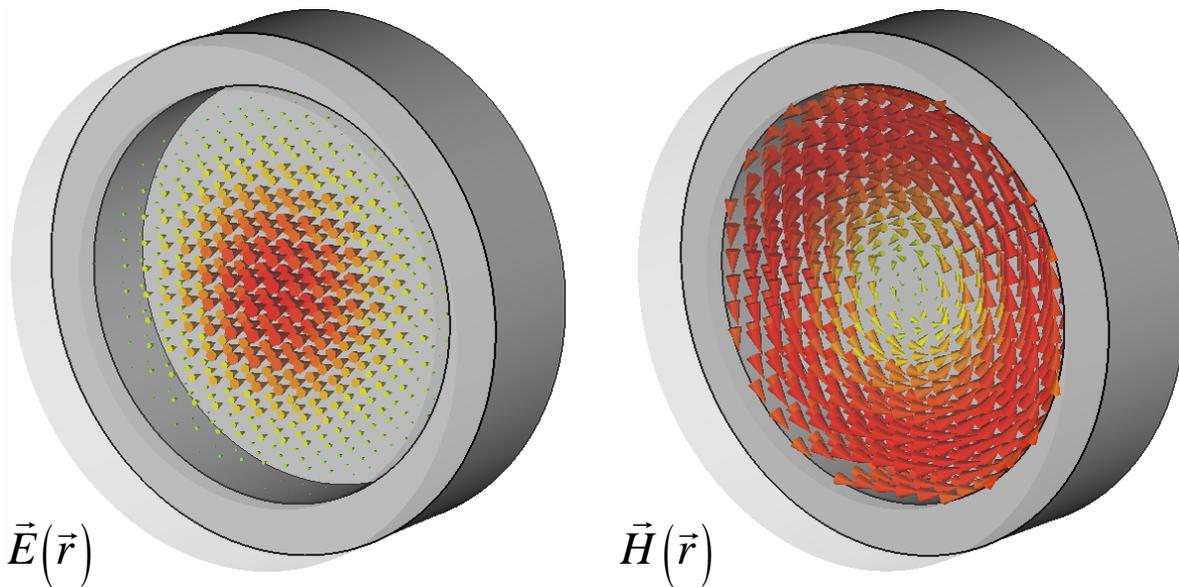
$$\frac{d}{dx} J_0(x) = J_1(x).$$

Die entsprechenden TE- bzw. TM-Moden weisen daher die gleiche Resonanzfrequenz auf:

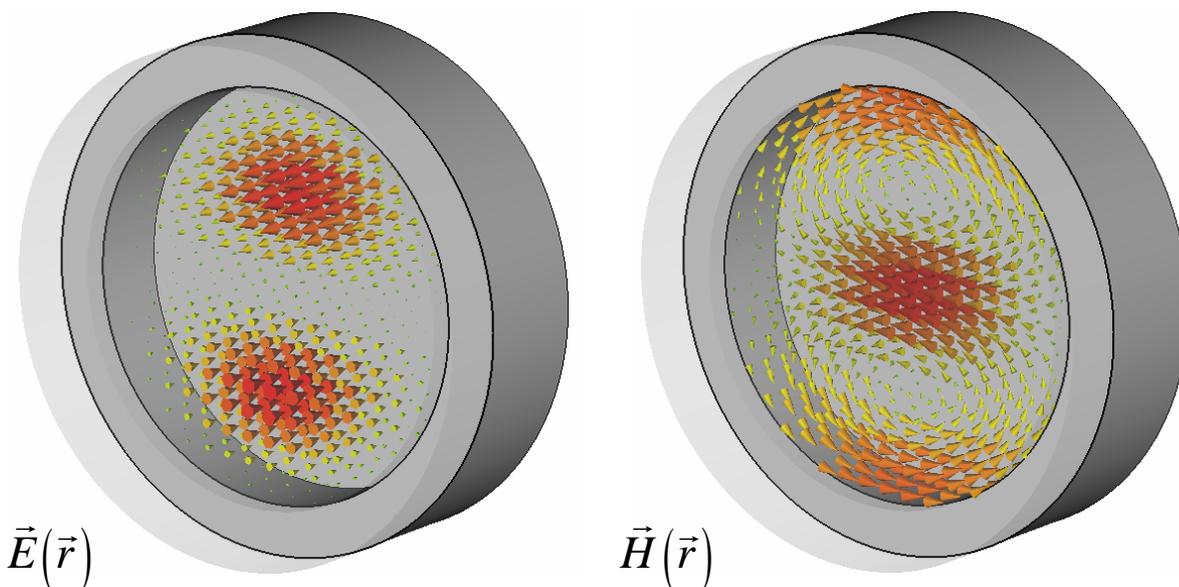
$$\text{TE}_{0np} = \text{TM}_{1np} \text{ für beliebige Werte von } n \text{ und } p.$$

Die folgenden Abbildungen zeigen eine Momentaufnahme der Feldverteilungen der ersten beiden TM-Moden eines abgeschlossenen, zylindrischen Resonators, weitere Beispiele finden sich im Anhang. Wegen  $p = 0$  besteht bei beiden Moden keine Abhängigkeit von der Resonatorlänge, das elektrische Feld hat damit nur eine longitudinale Komponente. Für die Abbildung wurde der Resonator jenseits einer willkürlich gewählten Schnittebene transparent dargestellt.

### TM<sub>010</sub>-Mode



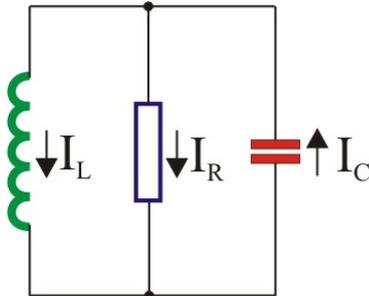
### TM<sub>110</sub>-Mode



## 1.2 Das Cavity als Schwingkreis

### Definition der Kenngrößen im unbelasteten Fall

Wir betrachten das Ersatzschaltbild eines Hohlraumresonators – den LCR-Parallelkreis:



Es gelten die bestens bekannten Beziehungen:

Spannungen:  $-U_C = U_R = U_L$ ,  $C \cdot \dot{U}_C = I$ ,  $U_L = L \cdot \dot{I}$  (Generator!)

Ströme:  $I_C = I_R + I_L$

Dies ergibt die Differentialgleichung

$$\ddot{U} + \frac{1}{RC} \dot{U} + \frac{1}{LC} U = 0$$

Wir definieren folgende Größen:

- Zeitkonstante

$$\tau = R \cdot C$$

- Resonanz-Kreisfrequenz

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$$

- Kreisgüte

$$Q_0 = \frac{2\pi \cdot \text{gespeicherte Energie}}{\text{Energieverlust pro Periode}} = \frac{2\pi \cdot W}{T \cdot P} = \frac{\omega_0 \cdot W}{P}$$

Als Lösung ergibt sich für einen schwach gedämpften Kreis (Schwingfall)

$$U(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{2\tau}} \cdot e^{i(\omega_0 t + \varphi_0)}$$

Für die gespeicherte Energie ergibt sich

$$W = \frac{1}{2} C \cdot |U|^2 = \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot C \cdot U_0^2,$$

der Energieverlust (dissipierte Leistung) beträgt

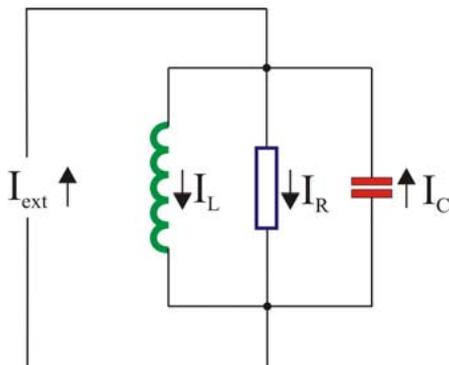
$$P = \dot{W} = -\frac{1}{\tau} \cdot W$$

und damit erhalten wir für die Kreisgüte die altbekannten Beziehungen

$$Q_0 = \frac{\omega_0 \cdot W}{P} = \omega_0 \cdot \tau = \omega_0 RC = \frac{R}{\omega_0 L}$$

### Erzwungene Schwingungen

Wir regen den Schwingkreis mit einer externen Stromquelle an und erhalten



Spannungen:  $-U_C = U_R = U_L$

Ströme:  $I_C + I_{ext} = I_R + I_L$

$$I_C = \dot{Q}_C = C \cdot \dot{U}_C$$

$$I_R = U_R / R$$

$$\dot{I}_L = U_L / L$$

$$\ddot{U} + \frac{\omega_0}{Q_0} \cdot \dot{U} + \omega_0^2 \cdot U = \frac{1}{C} \dot{I}_{ext}$$

Wir setzen für die externe Anregung  $I_{ext} = \hat{I}_{ext} \cdot e^{i\omega t}$  und erhalten mit dem Ansatz

$U = \hat{U} \cdot e^{i\omega t}$  die inhomogene komplexe Lösung:

$$\hat{U} = \frac{i\omega \hat{I}_{ext} / C}{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{i\omega\omega_0}{Q_0}}$$

Nach Einsetzen der Beziehung für die Kreisgüte ergibt sich folgendes wohlbekanntes Resultat:

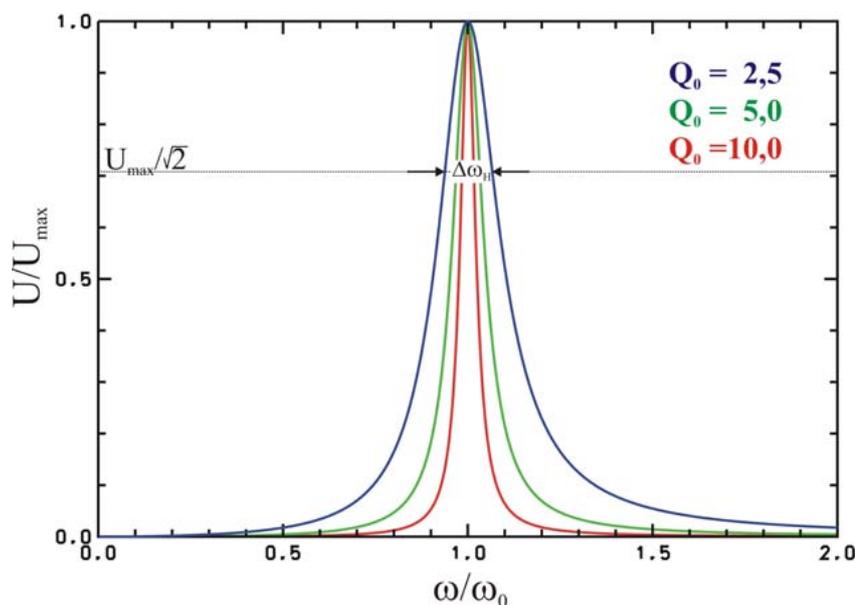
$$\hat{U} = \frac{R \cdot \hat{I}_{ext}}{1 + iQ_0 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \stackrel{\Delta\omega \ll \omega_0}{\approx} \frac{R \cdot \hat{I}_{ext}}{1 + 2iQ_0 \frac{\Delta\omega}{\omega}}$$

woraus sich für Betrag und Phasenverschiebung Folgendes ergibt:

$$|\hat{U}| = \frac{R \cdot \hat{I}_{ext}}{\sqrt{1 + Q_0^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} \stackrel{\Delta\omega \ll \omega_0}{\approx} \frac{R \cdot \hat{I}_{ext}}{\sqrt{1 + 4Q_0^2 \left( \frac{\Delta\omega}{\omega} \right)^2}}$$

$$\tan \varphi = Q_0 \left( \frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right) \stackrel{\Delta\omega \ll \omega_0}{\approx} -2Q_0 \frac{\Delta\omega}{\omega}$$

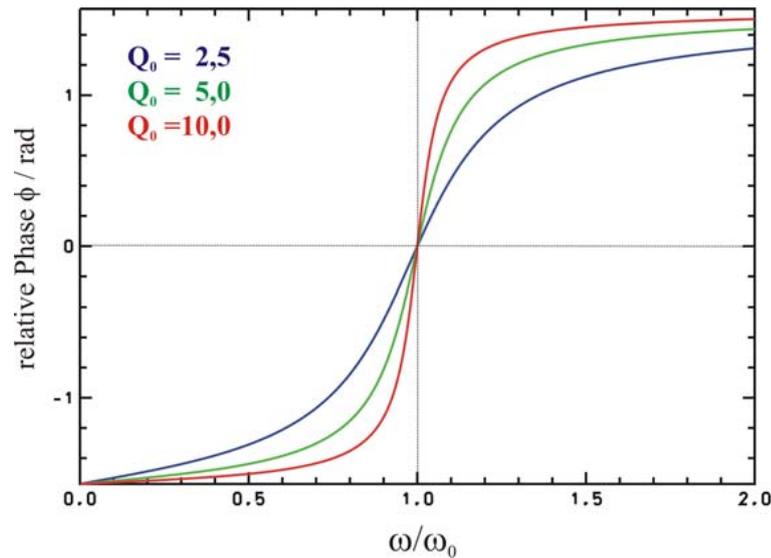
Die Abhängigkeit der Spannung von der Frequenz wird durch die Resonanzkurve dargestellt und hat folgende Form (ideale Spule  $\Rightarrow \omega_r = \omega_0$  !)



Die unbelastete Kreisgüte kann auf einfache Weise durch Messung der so genannten Halbwertsbreite  $\Delta\omega_H$  aus der Resonanzkurve bestimmt werden (was durch Einsetzen in die Beziehung für  $|\hat{U}|$  einfach verifiziert werden kann):

$$Q_0 = \frac{\omega_0}{\Delta\omega_H}, \quad \Delta\omega_H = \text{volle Halbwertsbreite bei } \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}}$$

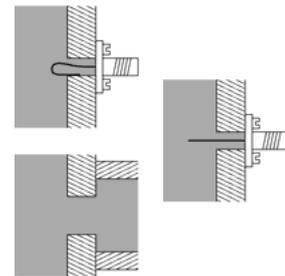
Der Phasenverlauf zeigt einen nulldurchgang der relativen Phase bei  $\omega_0$



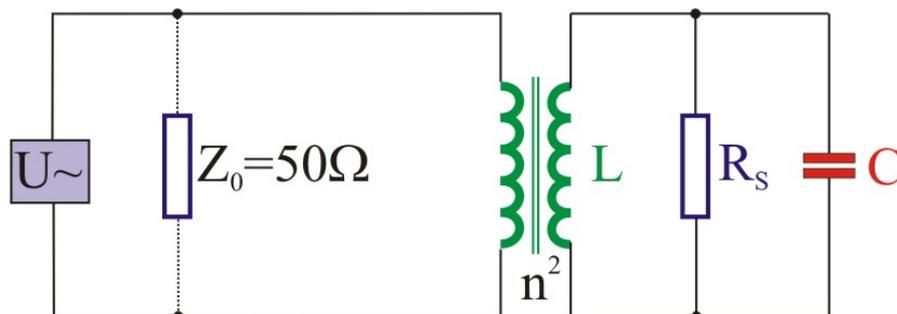
### Belasteter Fall durch Einkopplung von Hochfrequenz

Es gibt im Wesentlichen drei verschiedene Möglichkeiten, Hochfrequenz in einen Hohlraumresonator einzukoppeln:

- Kopplung an das magnetische Feld (Schleifenkopplung)
- Kopplung an das elektrische Feld (Stiftkopplung)
- Einkopplung aus dem Hohlleiter (Schlitzkopplung)



Wir wollen uns im Folgenden auf eine magnetische Einkopplung beschränken, die anderen Einkopplungen können völlig analog behandelt werden. Im Fall der Schleifenkopplung ergibt sich folgendes Szenario im Ersatzschaltbild:



Ziel der Einkopplung ist es, die vom Generator erzeugten Mikrowellen möglichst vollständig (d.h. reflexionsfrei) in den Resonator zu bringen. Dazu muss die Leitung vom Generator zum Resonator mit ihrem Wellenwiderstand (Impe-

danz typ.  $50\Omega$ ) abgeschlossen werden. Die Impedanz des Resonators ist eine komplexe Größe und nur im Resonanzfall reell. Sie wird dann als so genannte Shuntimpedanz  $R_s$  bezeichnet:

$$Z(\omega_0) = R_s = \text{reell}$$

Die Größenordnung beträgt typischerweise  $M\Omega$ ! Daher wird sie durch die Schleifenkopplung zu  $Z_a = R_s/n^2$  herab transformiert; im Ersatzschaltbild entspricht dies einem Transformator mit Wicklungsverhältnis  $n$ . Für die Reflexion ist das Verhältnis aus Abschlusswiderstand und Leitungsimpedanz maßgebend. Wir definieren daher als Koppelfaktor

$$\kappa = \frac{Z_a}{Z_0} = \frac{R_s}{n^2 \cdot Z_0}$$

Der Resonator wird durch die externe Leitung zusätzlich belastet:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_s} + \frac{1}{n^2 \cdot Z_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_{\text{ext}}}$$

und die unbelastete Kreisgüte sinkt durch das zusätzliche Auftreten einer externen Güte  $Q_{\text{ext}}$  auf den Wert  $Q$ . Formal erhalten wir durch Einbeziehung der externen Verlustleistung  $P_{\text{ext}}$  folgende Zusammenhänge:

$$Q_{\text{ext}} = \frac{\omega_0 \cdot W}{P_{\text{ext}}} \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{\omega_0 \cdot W}{P + P_{\text{ext}}}$$

$$\kappa = \frac{Q_0}{Q_{\text{ext}}} = \frac{P_{\text{ext}}}{P} = \frac{R_s}{n^2 \cdot Z_0}$$

Wir unterscheiden die 3 Fälle

- $\kappa < 1$ : **unterkritische Kopplung**,  $Q > Q_0/2$
- $\kappa = 1$ : **kritische Kopplung**,  $Q = Q_0/2$ , **keine Reflexion!**
- $\kappa > 1$ : **überkritische Kopplung**,  $Q < Q_0/2$

### 1.3 Der komplexe Reflexionsfaktor

Bei Kenntnis des Koppelfaktors kann die unbelastete Güte  $Q_0$  aus der gemessenen belasteten Güte  $Q$  errechnet werden:

$$Q_0 = (1 + \kappa) \cdot Q$$

### Der komplexe Reflexionsfaktor

#### Abhängigkeit vom Leitungsabschluss

Im Fall einer Reflexion haben wir eine hinlaufende ( $\hat{U}_+$ ,  $\hat{I}_+$ ) und eine rücklaufende ( $\hat{U}_-$ ,  $\hat{I}_-$ ) Welle auf der Leitung. Wir definieren den komplexen Reflexionsfaktor  $\rho$  durch das Verhältnis

$$\rho = \frac{\hat{U}_-}{\hat{U}_+}$$

Am Abschlusswiderstand  $Z_a$  und der Leitungsimpedanz  $Z_0$  haben wir dann

$$Z_a = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \frac{\hat{U}_+ + \hat{U}_-}{\hat{I}_+ + \hat{I}_-}, \quad Z_0 = \frac{\hat{U}_+}{\hat{I}_+} = \frac{\hat{U}_-}{-\hat{I}_-}$$

und erhalten nach Einsetzen des Reflexionsfaktors  $\rho_0$  am Leitungsende

$$Z_a = \frac{1 + \rho_0}{1 - \rho_0} \cdot Z_0 \quad \Leftrightarrow \quad \rho_0 = \frac{Z_a - Z_0}{Z_a + Z_0} = \frac{(Z_a/Z_0) - 1}{(Z_a/Z_0) + 1}$$

#### Reflexion in der Nähe einer isolierten Resonanz

Im Fall nicht überlappender Resonanzen (den wir hier ausschließlich betrachten wollen) ist uns die Impedanz des Resonators bekannt (vgl. Kapitel 2.2.). Wir erhalten mit

$$Z_{\text{Cav}} = \frac{R_S}{1 + iQ_0 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \stackrel{\Delta\omega \ll \omega_0}{\approx} \frac{R_S}{1 + 2iQ_0 \frac{\Delta\omega}{\omega}}$$

und unter Einbeziehung des Koppelfaktors

$$\frac{Z_a}{Z_0} = \frac{Z_{Cav}}{n^2 \cdot Z_0} = \kappa \frac{Z_{Cav}}{R_S} \stackrel{\Delta\omega \ll \omega_0}{\approx} \frac{\kappa}{1 + 2iQ_0 \frac{\Delta\omega}{\omega}}$$

Damit ergibt sich für den komplexen Reflexionsfaktor in Abhängigkeit der Frequenzverschiebung  $\Delta\omega$  von der Resonanzfrequenz  $\omega_0$ :

$$\rho_0(\Delta\omega) = \frac{\kappa - \left(1 + 2iQ_0 \frac{\Delta\omega}{\omega}\right)}{\kappa + \left(1 + 2iQ_0 \frac{\Delta\omega}{\omega}\right)}$$

Dies gilt natürlich nur unmittelbar an der Resonatoreinkopplung. Wird der Reflexionsfaktor in einer Entfernung  $l$  von der Einkopplung (bedingt durch das Verbindungskabel zwischen Messbrücke und Resonatoreinkopplung) gemessen, addiert sich der doppelte Laufzeitfaktor der Welle im Kabel. Mit der Wellenzahl

$$k = \frac{\omega}{v_{ph}} = \omega \cdot \sqrt{L' \cdot C'}$$

die von den Kabeleigenschaften (Induktivität  $L'$  bzw. Kapazität  $C'$  pro Länge) **und von der Frequenz (!)** abhängt, ergibt sich unter Vernachlässigung der Leitungsverluste (aufpassen bei Hohlleitern, da ist das Ganze abhängig von der angeregten Mode!)

$$\rho(\Delta\omega) = \rho_0(\Delta\omega) \cdot e^{-2ikl} = \frac{\kappa - \left(1 + 2iQ_0 \frac{\Delta\omega}{\omega}\right)}{\kappa + \left(1 + 2iQ_0 \frac{\Delta\omega}{\omega}\right)} \cdot e^{-2ikl}$$

In Anbetracht der großen Kreisgüten ( $Q_0 = 1000 - 10000$ ) wollen wir aber diesen Effekt im Folgenden erst einmal vernachlässigen – er ist jedoch bei größerem Frequenzhub sehr schön auf dem nicht kalibrierten Netzwerkanalysator bei der vektoriellen Messung des Reflexionsfaktors zu beobachten und führt zu Kreisen mit annähernd konstantem Radius, die in der Auswertung zur Normierung herangezogen werden.

## 1.4 Messung von $|\rho|$

### Die „Resonanzkurve“

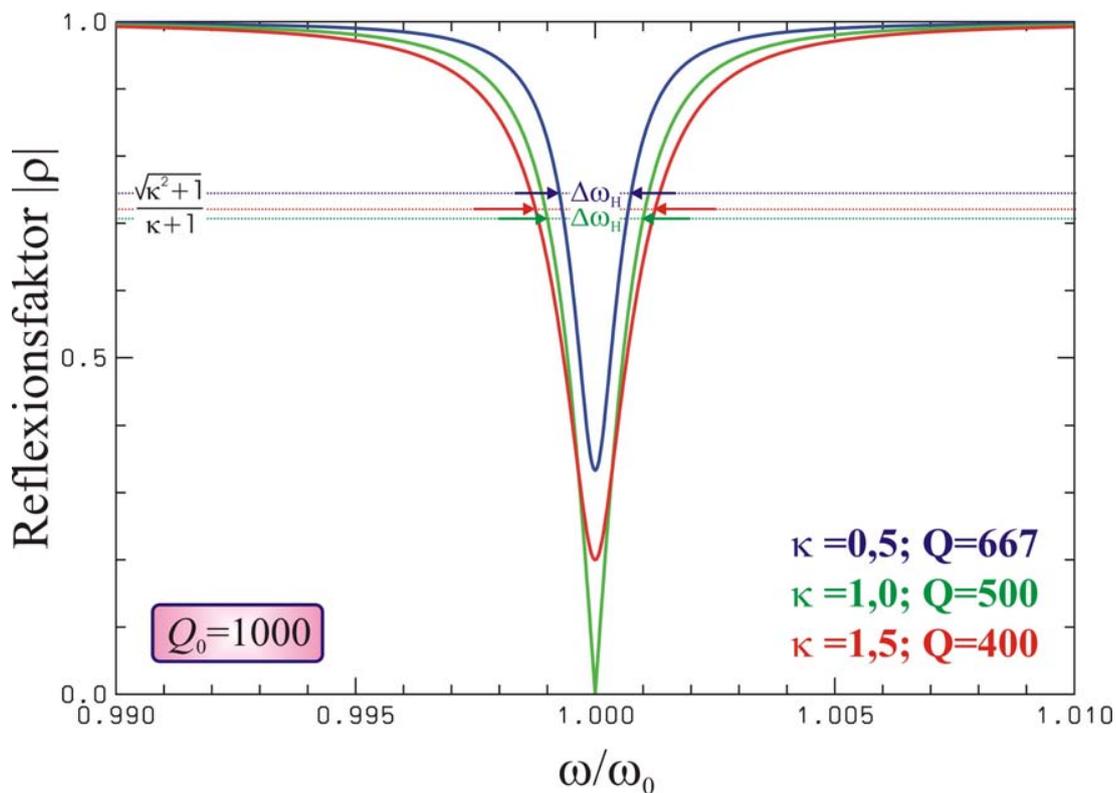
Durch Aufspaltung in Real- und Imaginärteil erhalten wir für den komplexen Reflexionsfaktor am Ort der Einkopplung

$$\rho_0(\Delta\omega) = \frac{(\kappa^2 - 1) - 4Q_0^2 \left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)^2 - 4i\kappa Q_0 \frac{\Delta\omega}{\omega}}{(\kappa + 1)^2 + 4Q_0^2 \left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)^2}$$

und nach Bildung des Betrages ergibt sich

$$|\rho(\Delta\omega)| = |\rho_0(\Delta\omega)| = \sqrt{\frac{(\kappa - 1)^2 + 4Q_0^2 \left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)^2}{(\kappa + 1)^2 + 4Q_0^2 \left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)^2}}$$

Auf einem Skalaren Netzwerkanalysator sieht man dann folgende Darstellung des Reflexionsfaktors (und dies gilt exakt, da die Kabellängen bei der Berechnung für eine verlustlose Leitung herausfliegen):



## Bestimmung der Resonanzfrequenz und der Kopplung

Im Fall der Resonanz ( $\Delta\omega = 0$ ) wird die Reflexion minimal. Die Resonanzfrequenz  $\omega_0$  wird abgelesen, indem man mit den Cursor-Funktionen das Minimum des Reflexionsfaktors sucht. Die Kopplung erhält man aus

$$|\rho(\Delta\omega = 0)| = \left| \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \right| \Rightarrow \kappa = \begin{cases} (1 + |\rho|)/(1 - |\rho|), & \rho > 0 \\ (1 - |\rho|)/(1 + |\rho|), & \rho < 0 \end{cases}$$

wobei leider nicht zwischen  $\rho > 0$  bzw.  $\rho < 0$  unterschieden werden kann. Achtung: Eine präzise Messung von  $|\rho|$  erfordert einen kalibrierten Analysator!!

## Bestimmung der Kreisgüte

Für die belastete Güte gilt

$$Q = \frac{Q_0}{1 + \kappa} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega_H} \xrightarrow{\Delta\omega_H = 2\Delta\omega} \frac{\Delta\omega}{\omega} \approx \frac{1 + \kappa}{2Q_0}$$

da die entsprechende Frequenzverschiebung nur die Hälfte der Halbwertsbreite beträgt! Wir erhalten damit für den Reflexionsfaktor

$$|\rho(\Delta\omega_H/2)| = \sqrt{\frac{(\kappa - 1)^2 + (\kappa + 1)^2}{(\kappa + 1)^2 + (\kappa + 1)^2}} = \frac{\sqrt{\kappa^2 + 1}}{\kappa + 1}$$

und damit folgende wichtige Botschaft:

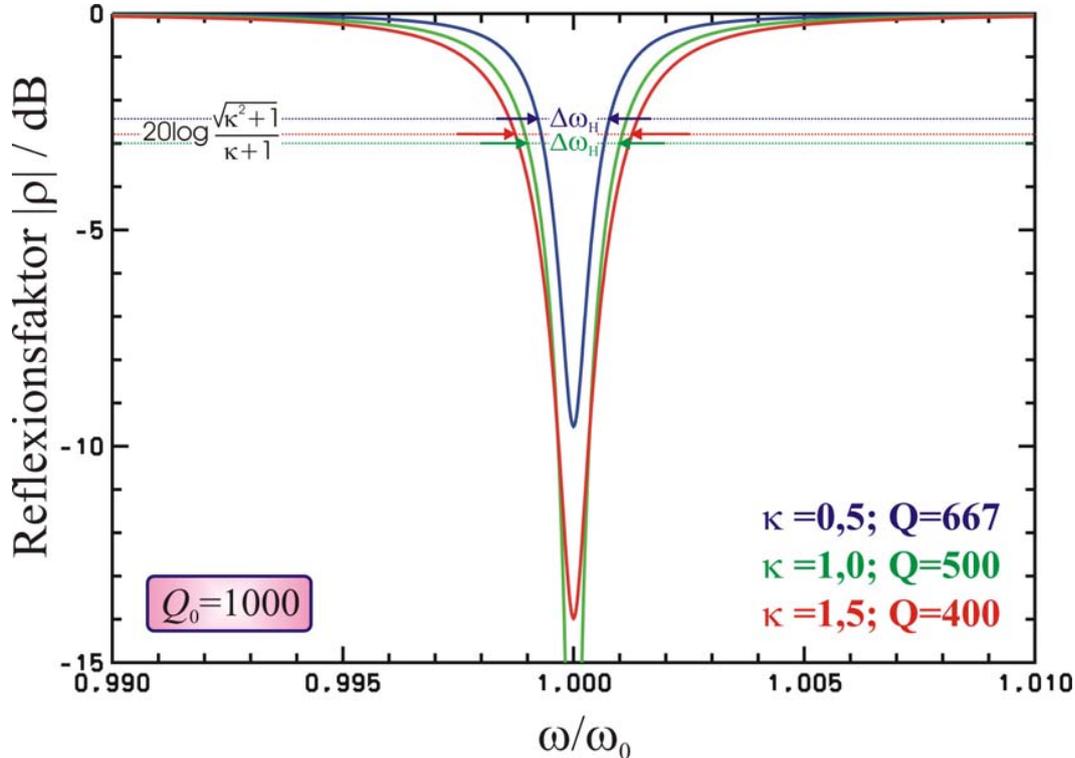
**Nur im Fall  $\kappa=1$  misst man zur Bestimmung der Kreisgüte die volle 3dB-Halbwertsbreite – dies entspricht  $\rho = 1/\sqrt{2}$  wegen der Leistungsdefinition der dB-Werte ( $\text{dB} = 20 \cdot \log(U/U_0)$ ), in allen anderen Fällen muss bei**

$$|\rho(\Delta\omega_H/2)| = \frac{\sqrt{\kappa^2 + 1}}{\kappa + 1} \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

**die volle Halbwertsbreite bestimmt werden (vgl. die lin/log-Abbildungen)!**

## 1.5 Vektorielle Messung des Reflexionsfaktors

Eine Resonanz mit einer Kreisgüte  $Q_0=1000$  und unterschiedlichen Ankopplungen ( $\kappa = 0,5; 1; 1,5$ ) sähe in einer logarithmischen Darstellung dann folgendermaßen aus:



## Vektorielle Messung des Reflexionsfaktors

### Die „Resonanzkurve“ in der komplexen Ebene

Wir erhielten für den komplexen Reflexionsfaktor folgenden Ausdruck:

$$\rho(\Delta\omega) = \frac{(\kappa^2 - 1) - 4Q_0^2 \left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)^2 - 4i\kappa Q_0 \frac{\Delta\omega}{\omega}}{(\kappa + 1)^2 + 4Q_0^2 \left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)^2} \cdot e^{-2ikl}$$

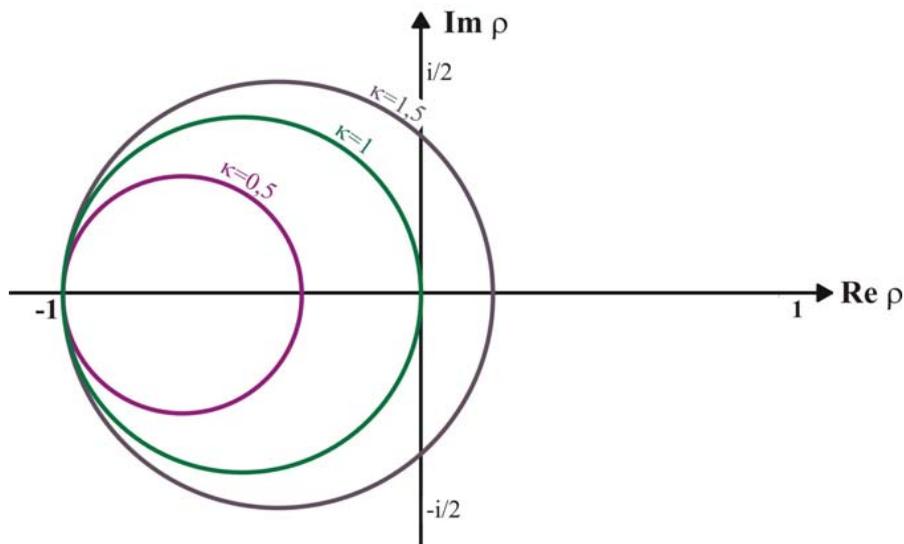
Vernachlässigen wir zunächst den Laufzeitfaktor  $e^{-2ikl}$  und tragen den Reflexionsfaktor in der komplexen Ebene auf, so beschreibt  $\rho_0$  in der unmittelbaren Nähe der Resonanz einen Kreis um  $(x_0, y_0)$  mit dem Radius  $r$

$$x_0 + iy_0 = -\frac{1}{1+\kappa}, \quad r = \frac{\kappa}{1+\kappa}$$

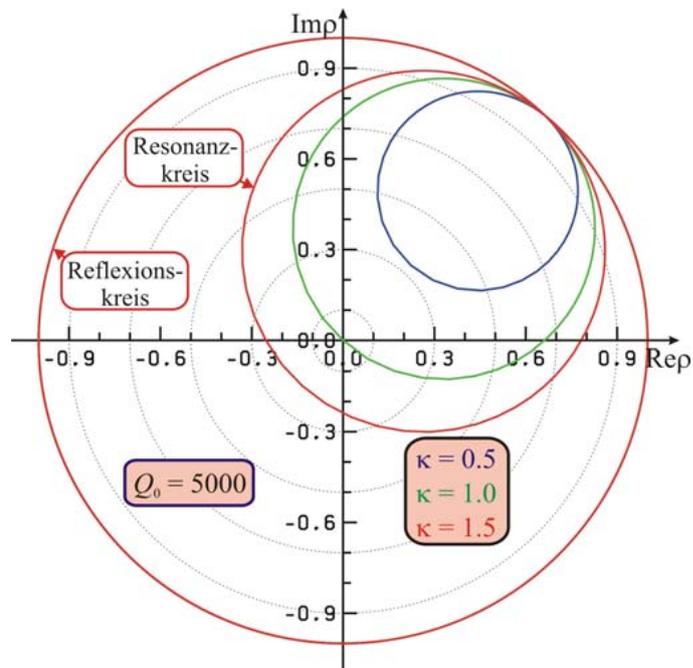
Dies kann in einer länglichen Rechnung durch Einsetzen von  $r$  und  $x_0$  verifiziert werden, die hier nur auszugsweise zur Überprüfung wiedergegeben werden soll:

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\left[ \frac{(\kappa^2 - 1) - 4Q_0^2 \left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)^2}{(\kappa + 1)^2 + 4Q_0^2 \left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)^2} + \frac{1}{1 + \kappa} \right]^2}_{(x-x_0)^2} + \underbrace{\left[ \frac{4\kappa Q_0 \frac{\Delta\omega}{\omega}}{(\kappa + 1)^2 + 4Q_0^2 \left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)^2} \right]^2}_{y^2} = \underbrace{\left[ \frac{\kappa}{1 + \kappa} \right]^2}_{r^2} \\
 & \dots \\
 & \Leftrightarrow \frac{\left[ \kappa(1 + \kappa) - \frac{4\kappa Q_0^2 \left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)^2}{1 + \kappa} \right]^2}{\left[ (1 + \kappa)^2 + 4Q_0^2 \left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)^2 \right]^2} + \frac{16\kappa^2 Q_0^2 \left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)^2}{\left[ (1 + \kappa)^2 + 4Q_0^2 \left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)^2 \right]^2} = \frac{\kappa^2}{(1 + \kappa)^2} \\
 & \dots \\
 & \Leftrightarrow \left[ \frac{\kappa \cdot \left( (1 + \kappa) + \frac{4Q_0^2 \left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)^2}{1 + \kappa} \right)}{(1 + \kappa)^2 + 4Q_0^2 \left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)^2} \right]^2 = \frac{\kappa^2}{(1 + \kappa)^2} \quad \text{q.e.d.}
 \end{aligned}$$

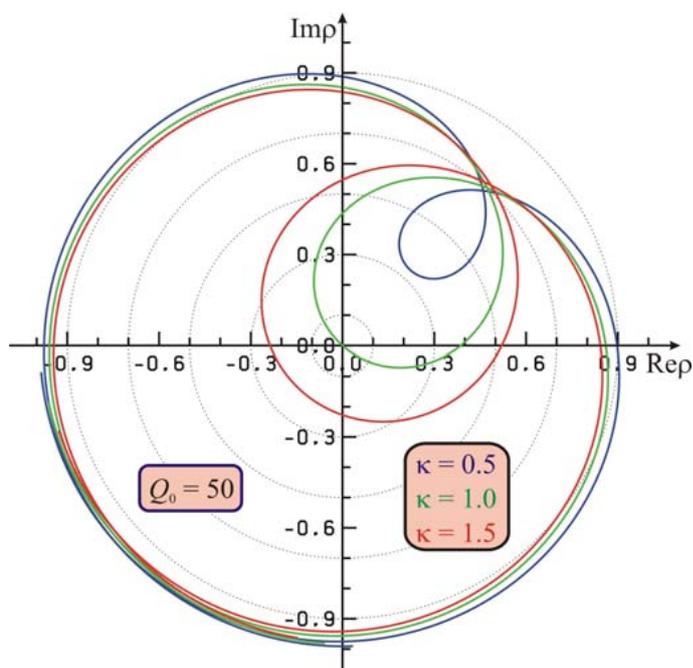
Radius und Position der Kreise sind also abhängig vom Koppelfaktor, hängen aber überhaupt nicht von der Kreisgüte ab! Unter Vernachlässigung des Laufzeitfaktors gehen alle Kreise durch den Punkt  $(-1; 0)$ , und wir erhalten:



Durch den Laufzeitfaktor werden die Kreise um den Ursprung rotiert. Im Falle hoher Kreisgüten ist die Änderung der Kreisform durch den Laufzeitfaktor vernachlässigbar und wir erhalten z.B. folgendes Bild, in dem wir den eigentlichen „Resonanzkreis“ und den vom Laufzeitfaktor erzeugten „Reflexionskreis“ mit Radius 1 erkennen:



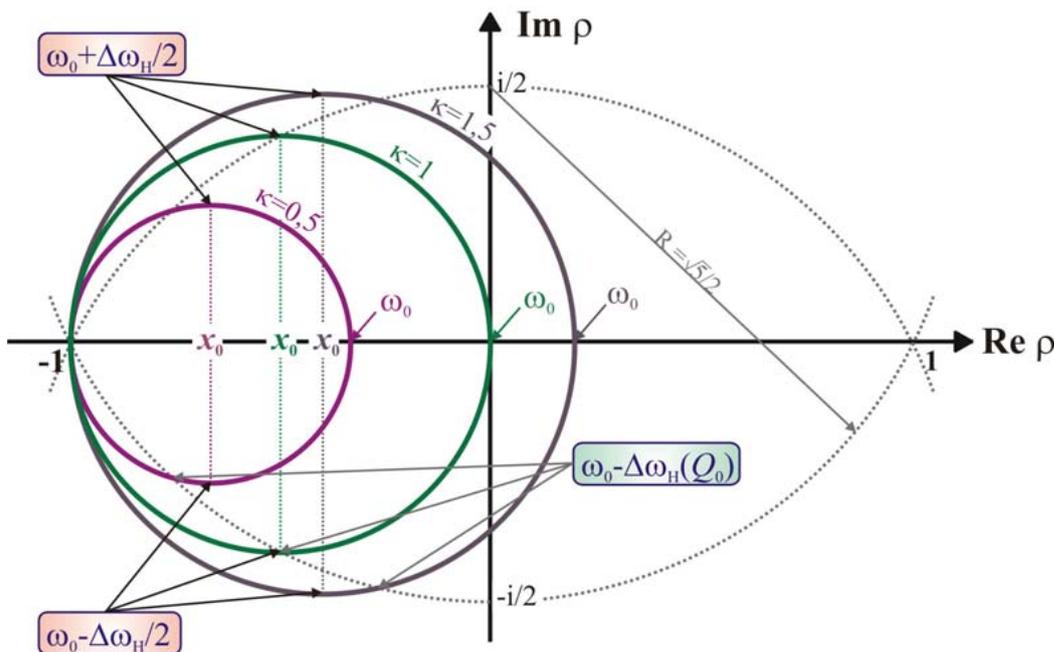
Im Fall niedriger Güten werden die Kreise durch den Laufzeitfaktor verbeult, und da die belastete Kreisgüte vom Koppelfaktor abhängt, ist auch die Deformation abhängig von der Kopplung; so z.B. für  $\omega_0 = 3\text{GHz}$ ,  $l = 2\text{m}$ :



Für eine präzise vektorielle Messung muss demnach auch hier der Analysator kalibriert werden - andernfalls müssten wir die Einflüsse des Laufzeitfaktors vernachlässigen (was wir aber nicht wollen). Generell haben solche Laufzeitfaktoren aber bei der Ermittlung der Kenngrößen aufgrund der hohen Kreisgüten einen geringen Einfluss, der im Notfall durch Verkürzen der Zuleitungskabel weiter verringert werden kann.

## Bestimmung der Resonanzfrequenz und der Kopplung

Im Resonanzfall ist die Impedanz des Resonators reell; die Ortskurve des komplexen Reflexionsfaktors muss daher die Realteil-Achse schneiden. Die entsprechende Frequenz ist die Resonanzfrequenz  $\omega_0$ .



Den Reflexionsfaktor in Resonanz  $\rho(\Delta\omega = 0)$  kann man nun wie folgt bestimmen: Man liest sowohl den (je nach Kopplung mit einem Vorzeichen behafteten!) Abstand  $d$  des Resonanzpunktes vom Koordinatenursprung (entspricht  $\rho$ ), als auch den für die Normierung benötigten Radius  $R$  des Reflexionskreises (entspricht  $|\rho| = 1$ ) in Einheiten von Skalenteilen ab. Der Reflexionsfaktor ergibt sich dann aus dem Verhältnis der beiden Größen:

$$\rho(\Delta\omega = 0) = d/R.$$

Der Koppelfaktor wird dann gemäß

$$\kappa = (1 + \rho)/(1 - \rho)$$

ausgerechnet.

## Bestimmung der Kreisgüte

Für die belastete Kreisgüte gilt – völlig analog zur skalaren Messung –

$$Q = \frac{Q_0}{1 + \kappa} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega_H} \quad \xrightarrow{\Delta\omega_H = 2\Delta\omega} \quad \frac{\Delta\omega}{\omega} \approx \frac{1 + \kappa}{2Q_0}$$

Setzen wir dies ein, erhalten wir für den Reflexionsfaktor

$$\rho_0(\pm\Delta\omega_H/2) = \frac{(\kappa^2 - 1) - (\kappa + 1)^2 \mp 2i\kappa(\kappa + 1)}{(\kappa + 1)^2 + (\kappa + 1)^2}$$

woraus sich nach einem Vergleich mit Kreismittelpunkt  $(x_0; 0)$  und Kreisradius  $r$

$$\rho_0(\pm\Delta\omega_H/2) = -\frac{1}{\kappa + 1} \mp i \frac{\kappa}{\kappa + 1} = x_0 \mp i \cdot r$$

ergibt. Zur Bestimmung der Halbwertsbreite wird der Resonanzkreis auf den Koordinatenursprung zentriert und der Frequenzvorschub beim Übergang vom unteren zum oberen Schnittpunkt mit der Imaginärteil-Achse gemessen.

Aus der vektoriellen Darstellung lässt sich auch unmittelbar die unbelastete Kreisgüte  $Q_0$  ablesen. Setzen wir die Beziehung  $Q_0 = \omega_0/\Delta\omega$  (diesmal aber mit der vollen Frequenzverschiebung!) in die Formel für  $\rho$  ein, erhalten wir

$$\rho_0(\pm\Delta\omega) = \frac{\kappa^2 - 5}{(\kappa + 1)^2 + 4} \mp i \frac{4\kappa}{(\kappa + 1)^2 + 4}$$

Diese Werte beschreiben in Abhängigkeit von  $\kappa$  einen Kreis mit Radius  $r = \sqrt{5}/2$  um den Punkt  $(0; i/2)$  bzw.  $(0; -i/2)$ , was wiederum durch Einsetzen verifiziert werden kann, z.B. für  $y_0 = -1/2$ :

$$[\kappa^2 - 5]^2 + \left[ -4\kappa + \frac{1}{2}((\kappa + 1)^2 + 4) \right]^2 = \frac{5}{4} \cdot [(\kappa + 1)^2 + 4]^2$$

$$\Leftrightarrow \kappa^4 - 10\kappa^2 + 25 + \frac{\kappa^4 + 20\kappa^3 + 110\kappa^2 + 100\kappa + 25}{4} = \frac{5}{4} \cdot [\kappa^4 + 4\kappa^3 + 14\kappa^2 + 20\kappa + 25]$$

$$\Leftrightarrow \frac{5\kappa^4 + 20\kappa^3 + 70\kappa^2 + 100\kappa + 125}{4} = \frac{5}{4} \cdot [\kappa^4 + 4\kappa^3 + 14\kappa^2 + 20\kappa + 25] \quad \text{q.e.d.}$$

Man erhält daher die Frequenzverschiebung  $\Delta\omega$  von der Resonanzfrequenz  $\omega_0$  und damit die volle Halbwertsbreite zur Bestimmung der unbelasteten Güte aus dem Schnittpunkt des Resonanzkreises mit einem der erwähnten Kreise um  $(0; \pm i/2)$ . Die unbelastete Güte wird dann über  $Q_0 = \omega_0/\Delta\omega$  errechnet.

### Weitere wichtige Größen und das Smith-Diagramm

Jede Mikrowellenleitung hat einen allgemeinen Wellenwiderstand  $Z_0$  und ist an ihrem Ende mit irgendeinem Abschlusswiderstand  $Z_a$  abgeschlossen. Bei der Transformation des Abschlusswiderstands längs der Leitung (was sich formal als eine Multiplikation mit dem entsprechenden Laufzeitfaktor erweist) stellt sich heraus, dass dieser an ausgezeichneten Stellen reell wird. Daher geht man bei der Behandlung von Leitungen gerne von einem reellen Abschlusswiderstand aus, der ggf. in die gewünschte komplexe Impedanz längs der Leitung transformiert werden kann. Man definiert in diesem Zusammenhang die

**Leitungsanpassung**

$$m = \frac{1-|\rho|}{1+|\rho|} = \begin{cases} \left| \frac{Z_a}{Z_0} \right| = \kappa, & \text{für } Z_a < Z_0 \\ \left| \frac{Z_0}{Z_a} \right| = \frac{1}{\kappa}, & \text{für } Z_a > Z_0 \end{cases}$$

Bei der Ausbreitung von Mikrowellen treten für  $Z_a \neq Z_0$  Reflexionen auf und folgende drei Kenngrößen sind dabei von besonderem Interesse:

**1. relativer norm. Widerstand**  $z_s = \left| \frac{Z(s)}{Z_0} \right|$  **an der Stelle  $s$  der Leitung**

**2. Reflexionsfaktor**  $\rho = \frac{Z_s - Z_0}{Z_s + Z_0} = \rho_0 \cdot e^{-i2ks} = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \cdot e^{-i2ks}$

**3. Stehwellenverhältnis**  $S = \frac{|\hat{U}_{\max}|}{|\hat{U}_{\min}|} = \frac{1+|\rho|}{1-|\rho|} = \frac{1}{m}$

Andere Größen können dann auf einfache Weise aus diesen berechnet werden. So ist zum Beispiel die im Abschlusswiderstand umgesetzte Wirkleistung  $P_A$  (d.h. in unserem Fall die im Resonator dissipierte Leistung) in Abhängigkeit der eingespeisten Leistung  $P_0$ :

$$P_a = \frac{4S}{(1+S)^2} \cdot P_0$$

was man durch Einsetzen von  $P_0 = P_+ = \frac{1}{2} |\hat{U}_+|^2 / |Z_0|$  und  $P_- = \frac{1}{2} |\hat{U}_-|^2 / |Z_0|$  in  $P_a = P_+ - P_-$  erhält.

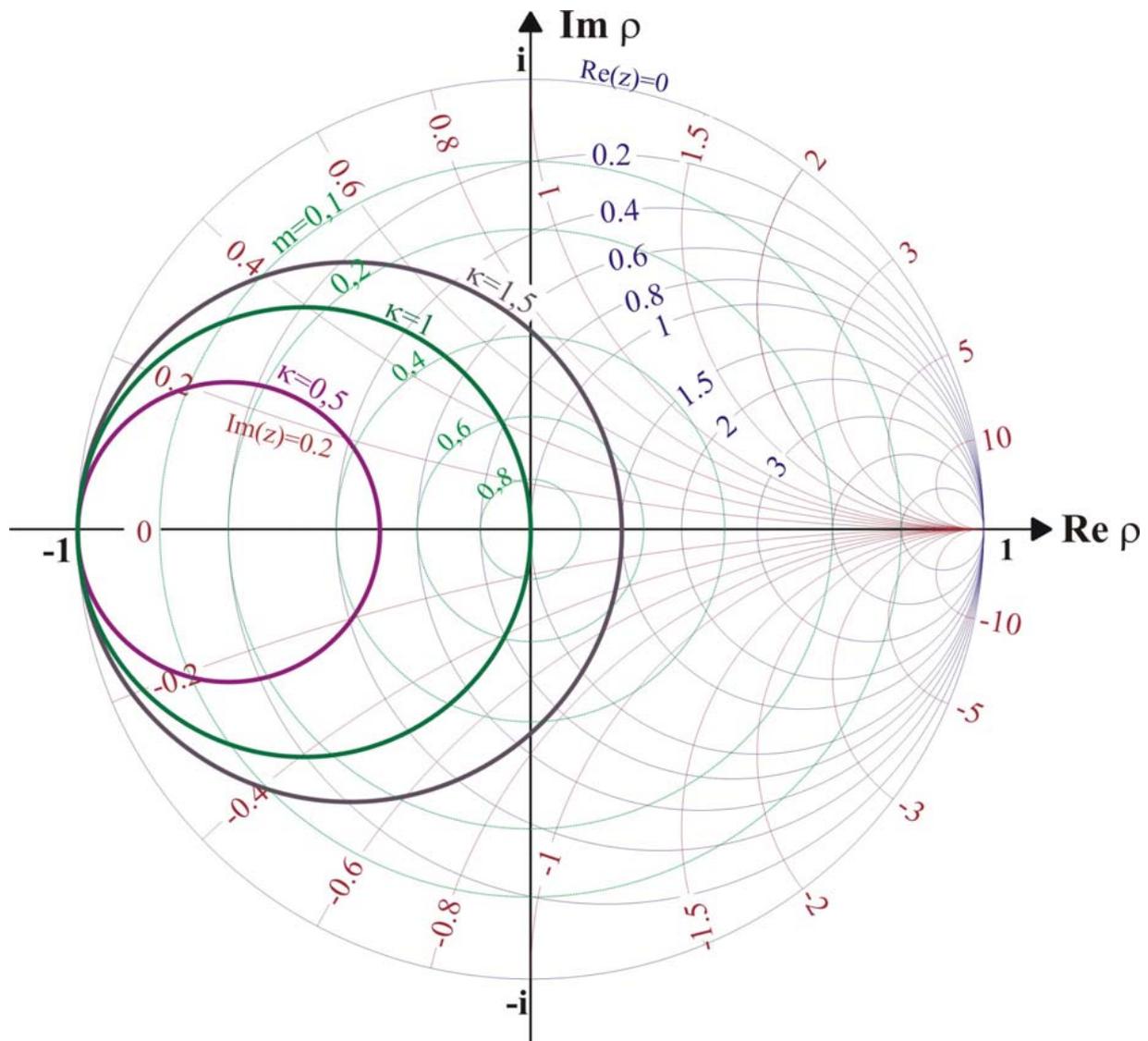
Zur Transformation der (relativen) Impedanzen längs der Leitung werden in die Darstellung des Reflexionsfaktors in der komplexen Ebene noch zusätzlich folgende Hilfslinien aufgenommen:

- **m – Kreise:**  $m = \text{konst.} \leftrightarrow |\kappa| = \text{konst.}$
- **Realteilkreise:**  $\text{Re}(z_s) = \text{Re}(Z_s/Z_0) = \text{konst.}$
- **Imaginärteilkreise:**  $\text{Im}(z_s) = \text{Im}(Z_s/Z_0) = \text{konst.}$
- **l – „Kreise“:**  $e^{-i2ks} = \text{konst.}$

Durch Einsetzen der Beziehung für den komplexen Reflexionsfaktor in die entsprechenden Kreisgleichungen können folgende Kreisradien und -mittelpunkte leicht verifiziert werden:

- **m – Kreise:**  $M = x_0 + i y_0 = 0, \quad r = \frac{1-m}{1+m}$
- **Realteilkreise:**  $M = x_0 + i y_0 = \frac{\text{Re}(\kappa)}{\text{Re}(\kappa)+1}, \quad r = \frac{1}{\text{Re}(\kappa)+1}$
- **Imaginärteilkreise:**  $M = x_0 + i y_0 = 1 + \frac{i}{\text{Im}(\kappa)}, \quad r = \frac{1}{\text{Im}(\kappa)}$
- **l – „Kreise“:** Geraden durch  $x_0 + i y_0 = 0$  und  $x_1 + i y_1 = e^{-i2ks}$

Die so verschönerte Darstellung erhält den Namen „**Smith-Diagramm**“ und erlaubt in unserem Fall ein besonders einfaches Ablesen des Koppelfaktors (als Berührungspunkt des Resonanzkreises mit einem Realteilkreis):

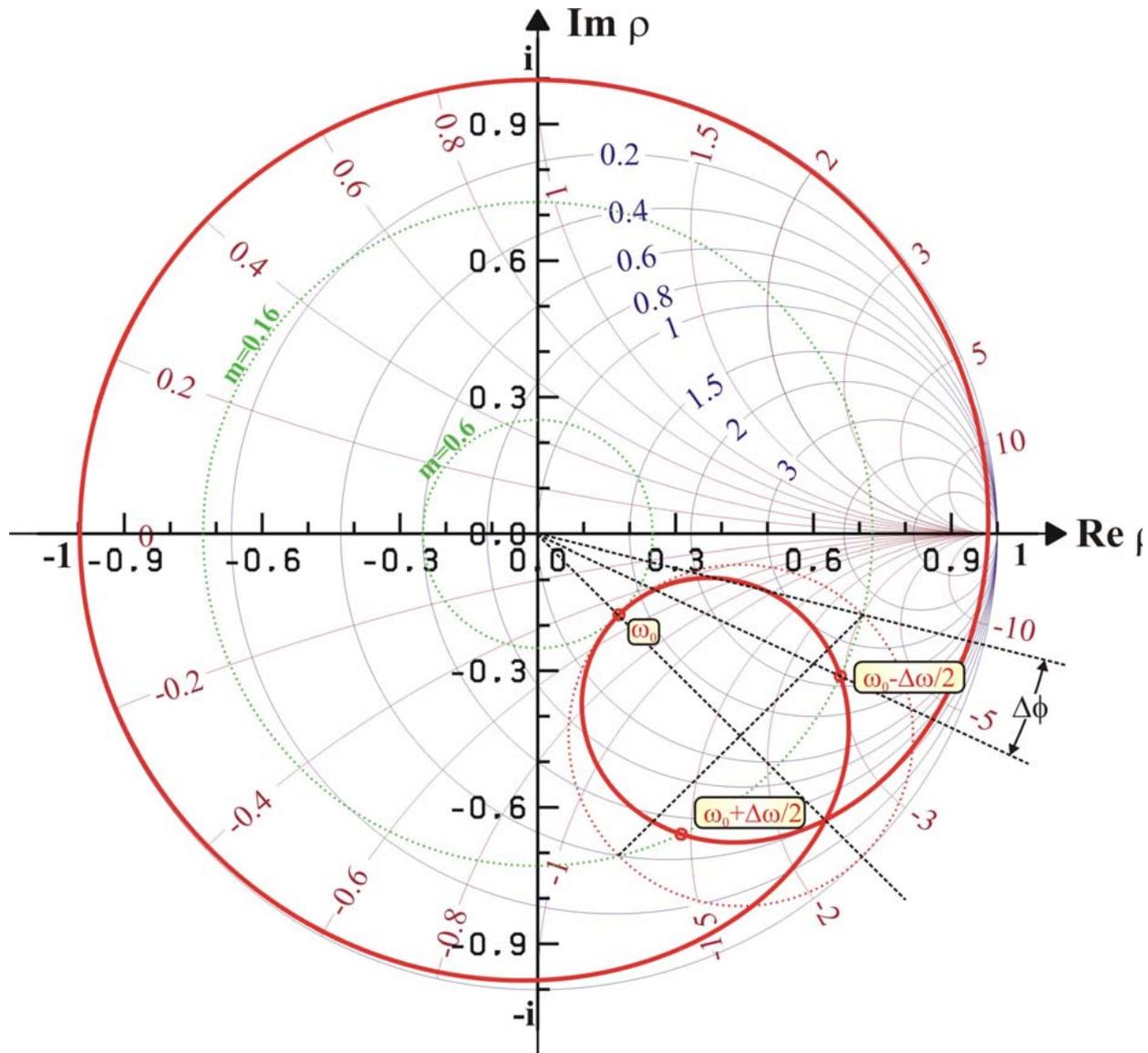


Mit Hilfe dieser Darstellung lassen sich Resonanzfrequenz, Koppelfaktor, Kreisgüte und die Impedanz des Resonators auch unter Berücksichtigung des Laufzeitfaktors ermitteln. Da dies einen tieferen Einblick in mögliche Fehlerquellen gewährt, wollen wir exemplarisch folgenden Fall betrachten

- Resonanzfrequenz:  $\omega_0 = 2\pi \cdot 3\text{GHz}$ ,
- Unbelastete Güte:  $Q_0 = 500$ ,
- Koppelfaktor:  $\kappa = 0,6$ ,

- Leitungslänge:  $l = 981,25 \text{ mm} \hat{=} (9 + 13/16) \cdot \lambda_0$

und vereinfachend davon ausgehen, dass die Wellenlänge im Kabel gleich der Vakuumwellenlänge ist. Auf dem Bildschirm erscheint folgendes Bild:



Wir lesen aus dem Berührungspunkt mit dem  $m$  – Kreis den Koppelfaktor  $\kappa = 0,6$  ab (für überkritische Kopplung ist der Wert  $1/m$  zu verwenden) und bestimmen die zugehörige Resonanzfrequenz  $\nu_0 = 3 \text{ GHz}$  am Frequenzgenerator. Aus dem Drehwinkel des Mittelpunkts des Resonanzkreises um den Koordinatenursprung erhalten wir die Leitungslänge bis auf ein Vielfaches von  $\lambda/2$  (einmal herum entspricht einem Vorschub von  $\lambda/2$ ); mit  $\Delta\varphi = 225^\circ$  ergibt sich  $l = 5/8 \cdot \lambda/2 \text{ mod}(\lambda/2)$ . Bei der Bestimmung der Güte ist die Deformation des

Kreises durch den Laufzeitfaktor zu berücksichtigen. Wir zeichnen zunächst den idealen Resonanzkreis um den „Mittelpunkt“ des realen Resonanzkreises, bestimmen die Schnittpunkte auf dem Durchmesser senkrecht zur Verbindungslinie vom Mittelpunkt zum Ursprung und transformieren diese längs des schneidenden  $m$  – Kreises auf den Resonanzkreis. Dort lesen wir die jeweilige Frequenzverschiebung ab und erhalten aus der zugehörigen vollen Halbwertsbreite die belastete Güte  $Q = 312,5$ .

Man sieht hierbei sehr schön, dass im Falle moderater Kreisgüten und langer Leitungen die Bestimmung von  $Q$  aus den Schnittpunkten des Durchmessers mit dem realen Resonanzkreis zu kleine Werte von  $\Delta\omega$  liefert!

Wir lernen dabei gleichzeitig, dass aus dem bei  $\omega_0 \pm \Delta\omega/2$  vorliegenden  $m$  – Wert ( $m \approx 0,16$ ) ein Stehwellenverhältnis  $S = 1/m \approx 6,3$  resultiert und wir immerhin noch ca. die Hälfte der Leistung in den Resonator hineinbekommen. Die unbelastete Güte ergibt sich zu  $Q_0 = (1 + \kappa) \cdot Q = 1,6 \cdot Q = 500$ .

Aus der Verschiebung der Punkte bei  $\omega_0 \pm \Delta\omega/2$  durch den Laufzeitfaktor lässt sich obendrein noch die vollständige Länge des Verbindungskabels bestimmen. Wir zeichnen die entsprechenden Verbindungsgeraden zwischen Ursprung und den Punkten  $\omega_0 - \Delta\omega/2$  auf dem realen und idealen Resonanzkreis und erhalten als Zwischenwinkel  $\Delta\phi = 11,3^\circ$ . Dies entspricht mit

$$\Delta\phi = -2\Delta kl = -\frac{4\pi l}{\Delta\lambda} = -\frac{4\pi l}{\lambda_0} \cdot \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda} = \frac{4\pi l}{\lambda_0} \cdot \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{2\pi l}{\lambda_0} \cdot \frac{1 + \kappa}{Q_0}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{l = \frac{\Delta\phi}{2\pi} \cdot \frac{Q_0}{1 + \kappa} \cdot \lambda_0 \approx 9,81 \cdot \lambda_0}$$

was unsere Verhältnisse recht gut trifft!

## 1.6 Störkörpermessungen

Zur Messung der elektrischen und magnetischen Felder innerhalb des Resonators (vorzugsweise auf der Achse) sind Antennen ungeeignet, da die erforderlichen Zuleitungen die Feldverteilung im Resonator stören würden. Daher wird durch Einbringen eines kleinen dielektrischen (bzw. leitenden) Körpers das elektrische (bzw. das elektrische und das magnetische) Feld innerhalb des Resonators am Ort des Körpers leicht verändert. Diese Veränderung bewirkt eine Verschiebung der Resonanzfrequenz ( $\omega_0 \rightarrow \omega$ ) und bei unveränderter Anregung mit  $\omega_0$  eine Veränderung des Reflexionsfaktors. Beides kann gemessen und zur Bestimmung der Feldstärken herangezogen werden. Im Fall der Messung der Verschiebung der Resonanzfrequenz spricht man von der **resonanten Störkörpermethode** (da der Resonator dann weiterhin resonant angeregt wird), im Fall der Messung der Veränderung des Reflexionsfaktors bei unveränderter Anregung von der **nicht resonanten Störkörpermessung**. Zur Bestimmung der Shuntimpedanz ist eine Messung des elektrischen Feldes ausreichend. Diese erfolgt mithilfe eines dielektrischen Störkörpers, auf den hier vornehmlich eingegangen werden soll.

### Slater-Formel

Wir unterscheiden im Folgenden zwischen den „ungestörten“ Feldern (d.h. bei ausgefahrenem Störkörper)

$$\vec{E}_0 \cdot e^{i\omega_0 t} \quad \text{und} \quad \vec{H}_0 \cdot e^{i\omega_0 t},$$

die sich bei der Anregung mit der originären Resonanzfrequenz  $\omega_0$  ergeben und den „gestörten“ Feldern (d.h. bei eingefahrenem Störkörper)

$$\vec{D} \cdot e^{i\omega t} = (\epsilon_0 \vec{E}_0 + \vec{P}) \cdot e^{i\omega t} \quad \text{und} \quad \vec{B} \cdot e^{i\omega t} = (\mu_0 \vec{H}_0 + \vec{M}) \cdot e^{i\omega t},$$

die bei der veränderten Resonanzfrequenz  $\omega$  angeregt werden. Die zusätzliche Polarisation  $\vec{P}$  und Magnetisierung  $\vec{M}$  rühren vom Störkörper her.

Wir berechnen im Folgenden die Änderung der gespeicherten Energie. Dazu gehen wir von den Maxwell'schen Gleichungen im Resonator aus und erhalten im Innenraum des Resonators wegen  $\vec{j} = 0$ ,  $\rho = 0$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{H}_0 &= \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_0}{\partial t} = i\omega_0 \varepsilon_0 \vec{E}_0 & \rightarrow & \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = i\omega \vec{D} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E}_0 &= -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}_0}{\partial t} = i\omega_0 \mu_0 \vec{H}_0 & \rightarrow & \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -i\omega \vec{B}\end{aligned}$$

Multiplikation der ersten Gleichung mit  $\vec{E}_0^*$  und der zweiten mit  $\vec{H}_0^*$ , Ausnutzen der Operatoridentität  $\vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{b}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) + \vec{b} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a})$  und Ersetzen der Rotation der ungestörten Felder durch ihre zeitliche Ableitung gemäß den linken Gleichungen ergibt:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot (\vec{H} \times \vec{E}_0^*) - i\omega_0 \mu_0 \vec{H}_0^* \cdot \vec{H} &= i\omega \vec{E}_0^* \cdot \vec{D} \\ \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}_0^*) + i\omega_0 \varepsilon_0 \vec{E}_0^* \cdot \vec{E} &= i\omega \vec{H}_0^* \cdot \vec{B}\end{aligned}$$

Wir integrieren über den Innenraum des Resonators und erhalten durch Anwendung des Gauß'schen Satzes

$$\begin{aligned}\underbrace{\oint_{\partial V} (\vec{H} \times \vec{E}_0^*) \cdot d\vec{A} - i\omega_0 \mu_0 \iiint_V (\vec{H}_0^* \cdot \vec{H}) dV}_{= 0} &= i\omega \iiint_V (\vec{E}_0^* \cdot \vec{D}) dV \\ \underbrace{\oint_{\partial V} (\vec{E} \times \vec{H}_0^*) \cdot d\vec{A} + i\omega_0 \varepsilon_0 \iiint_V (\vec{E}_0^* \cdot \vec{E}) dV}_{= 0} &= i\omega \iiint_V (\vec{H}_0^* \cdot \vec{B}) dV\end{aligned}$$

Das Oberflächenintegral verschwindet aufgrund der Randbedingungen auf den leitenden Innenwänden des Resonators. Einsetzen der gestörten Felder ergibt

$$\begin{aligned}-\omega_0 \mu_0 \iiint_V (\vec{H}_0^* \cdot \vec{H}) dV &= \omega \varepsilon_0 \iiint_V (\vec{E}_0^* \cdot \vec{E}) dV + \omega \iiint_V (\vec{E}_0^* \cdot \vec{P}) dV \\ \omega_0 \varepsilon_0 \iiint_V (\vec{E}_0^* \cdot \vec{E}) dV &= -\omega \mu_0 \iiint_V (\vec{H}_0^* \cdot \vec{H}) dV - \omega \iiint_V (\vec{H}_0^* \cdot \vec{M}) dV\end{aligned}$$

Wir multiplizieren die erste Gleichung mit  $\omega$ , die zweite mit  $\omega_0$ , subtrahieren beide voneinander und erhalten mit den Näherungen einer hohen Kreisgüte ( $\omega \omega_0 \approx \omega^2$ ) und eines kleinen Störkörpervolumens ( $\vec{E}_0^* \cdot \vec{E} \approx |E|^2$ )

$$\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega^2} = \frac{\iiint_{V_s} (\vec{E}_0^* \cdot \vec{P} - \vec{H}_0^* \cdot \vec{M}) dV}{\epsilon_0 \iiint_V |E_0|^2 dV} \approx 2 \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$$

Wir müssen nur noch über das Volumen  $V_s$  des Störkörpers integrieren, da die Polarisation und Magnetisierung nur innerhalb des Störkörpers von Null verschieden sind. Im Nenner der so genannten Slater-Formel steht das doppelte der gespeicherten Energie  $W$  im Resonator, welche mittels der Beziehung zur Güte sowie zur Resonanzfrequenz berechnet werden kann, vgl. Kapitel 2.1 bzw. Kapitel 2.3.

### Resonante Störkörpermessung

Im Fall eines kugelförmigen dielektrischen Störkörpers ist die Polarisation parallel und proportional zum elektrischen Feld. Hat der Störkörper eine kleine Dielektrizitätskonstante, kann in guter Näherung

$$\vec{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \cdot \vec{E}_0, \quad \vec{M} = 0$$

gesetzt werden. Wir definieren die Störkörperkonstante  $\alpha_s$  durch

$$\alpha_s = \frac{1}{2} \cdot (\epsilon - \epsilon_0) \cdot V_s$$

und erhalten die elektrische Feldstärke  $E_0(z)$  an der Stelle  $z$  auf der Achse in Abhängigkeit der dort gemessenen Verschiebung  $\Delta\omega(z)$  der Resonanzfrequenz:

$$E_0(z) = \sqrt{2 \cdot \frac{W}{\alpha_s} \cdot \frac{\Delta\omega(z)}{\omega_0}}$$

## Nicht resonante Störkörpermessung

Regen wir den Resonator bei eingefahrenem Störkörper weiterhin auf der Frequenz  $\omega_0$  (und damit um  $\Delta\omega$  von seiner Resonanzfrequenz entfernt) an, ändert sich der Reflexionsfaktor. Mit den Ergüssen aus Kapitel 4 erhalten wir:

$$\rho_0(\omega_0) = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}, \quad \rho(\omega) = \frac{\kappa - \left(1 + 2iQ_0 \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)}{\kappa + \left(1 + 2iQ_0 \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)}$$

Wir messen demzufolge eine Veränderung des Reflexionsfaktors von

$$\Delta\rho = \rho - \rho_0 \approx \frac{4i\kappa Q_0}{(1 + \kappa)^2} \cdot \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$$

und erhalten damit unter Einbeziehung der Ergebnisse der resonanten Störkörpermethode:

$$E_0(z) = \sqrt{\frac{1 + \kappa}{2\kappa Q_0}} \cdot \frac{W}{\alpha_s} \cdot |\Delta\rho(z)|$$

## Bestimmung der Shuntimpedanz

Die Shuntimpedanz  $R_s$  wurde in Kapitel 2 anhand des Ersatzschaltbildes eines Hohlraumresonators als Schwingkreis eingeführt. Hierdurch ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen Spannung  $U$ , Verlustleistung  $P_v$  und  $R_s$ :

$$R_s = \frac{U^2}{2P_v}$$

(Es muss warnend erwähnt werden, dass bei der Betrachtung von Linearbeschleunigern stets eine Definition ohne den Faktor 2 im Nenner verwendet wird). Die Beschleunigungsspannung  $U$  erhält man durch Integration des elektrischen Feldes längs der Achse des Resonators:

$$U = \int_0^L E_0(z) \cdot dz$$

Bei der Bestimmung des Energiegewinns eines Teilchens muss zusätzlich die Änderung des elektrischen Feldes während der Laufzeit des Teilchens durch den Resonator berücksichtigt werden. Im Fall ultra-relativistischer Teilchen gilt  $v \approx c$ , wodurch sich die Zeitabhängigkeit  $\cos(\omega t)$  durch  $\cos(\frac{\omega z}{c})$  ausdrücken lässt. Dieser Effekt wird oft in der Shuntimpedanz berücksichtigt und wir erhalten dann

$$R_S = \frac{1}{P_V} \cdot \left| \int_{-L/2}^{L/2} E_0(s) \cdot \cos\left(\frac{\omega s}{c}\right) \cdot ds \right|^2$$

Er lässt sich auch durch den Laufzeitfaktor  $\Lambda$  ausdrücken:

$$\Lambda = \left| \frac{\int_{-L/2}^{L/2} E_0(s) \cdot \cos\left(\frac{\omega s}{c}\right) \cdot ds}{\int_{-L/2}^{L/2} E_0(s) \cdot ds} \right|^2$$

Da die Verlustleistung über die Kreisgüte mit der gespeicherten Energie verknüpft ist, muss diese für die Bestimmung von  $R_S$  nicht bekannt sein. Wir erhalten demzufolge:

a) resonante Methode: 
$$R_S = \Lambda \cdot \frac{2Q_0}{\omega_0^2 \cdot \alpha_S} \cdot \left| \int_{-L/2}^{L/2} \sqrt{\Delta\omega(z)} \cdot dz \right|^2$$

b) nicht resonante Methode: 
$$R_S = \Lambda \cdot \frac{(1 + \kappa)^2}{2\omega_0 \kappa \alpha_S} \cdot \left| \int_{-L/2}^{L/2} \sqrt{|\Delta\rho(z)|} \cdot dz \right|^2$$

## 1.7 Feldplots einiger Resonatormoden

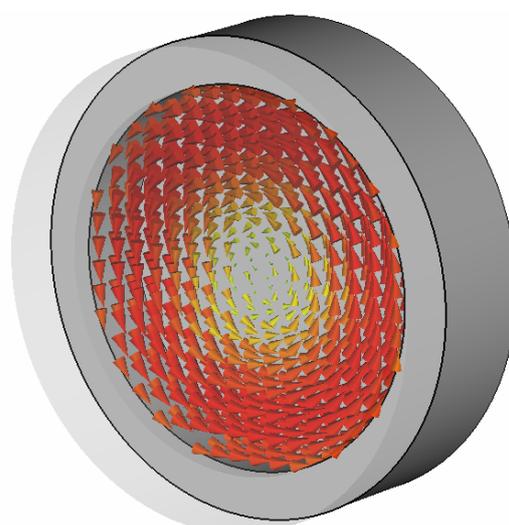
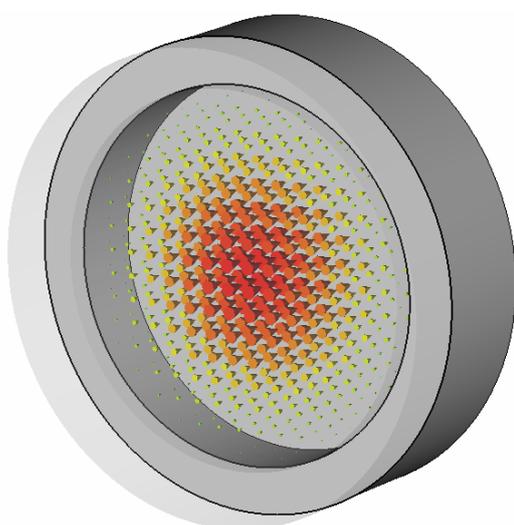
Die untenstehenden Abbildungen zeigen jeweils eine Momentaufnahme der Verteilung der elektrischen und magnetischen Felder für die ersten Resonatormoden (nicht nach Frequenzen geordnet), so wie sie sich aus einer Computersimulation (CST Microwave Studio) ergeben. Gerechnet wurde mit einem zylindrischen, abgeschlossenen Hohlraum, welcher die Abmessungen der im Versuch verwendeten Resonatoren aufweist. Für die Abbildung wurde der Resonator oberhalb einer willkürlich gewählten Schnittebene transparent dargestellt.

**Mode**

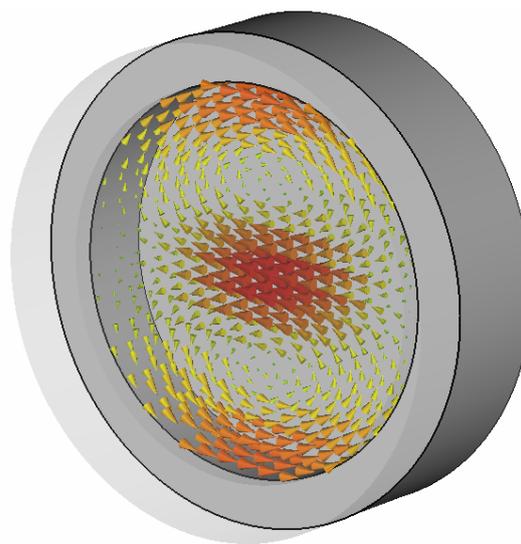
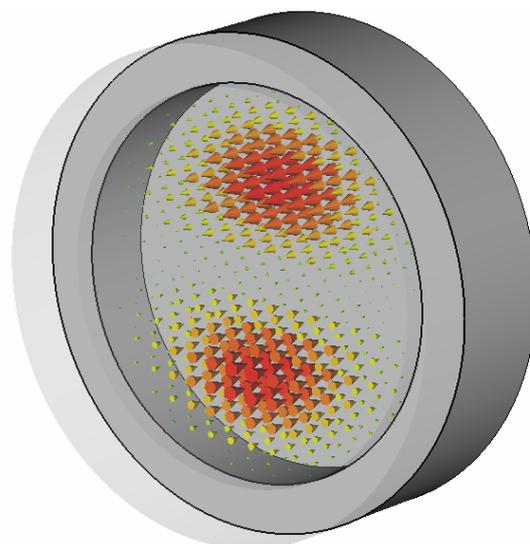
**Elektrisches Feld**

**Magnetisches Feld**

$TM_{010}$



$TM_{110}$

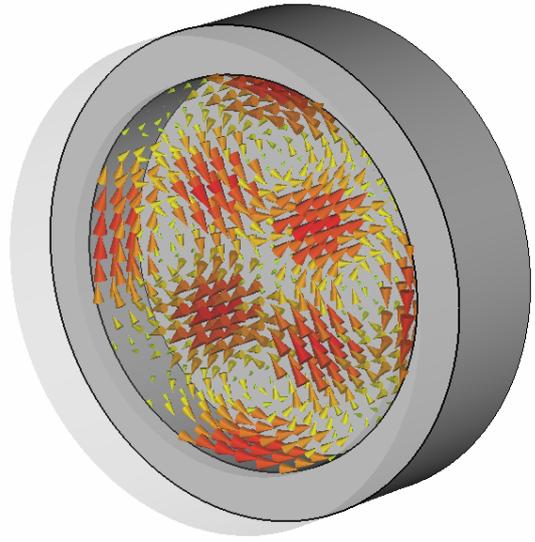
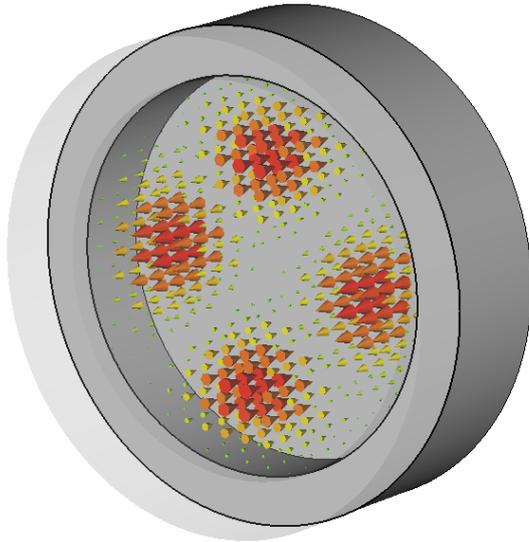


Mode

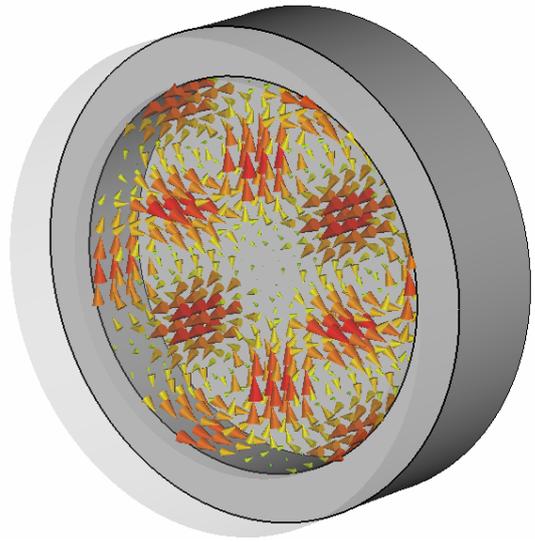
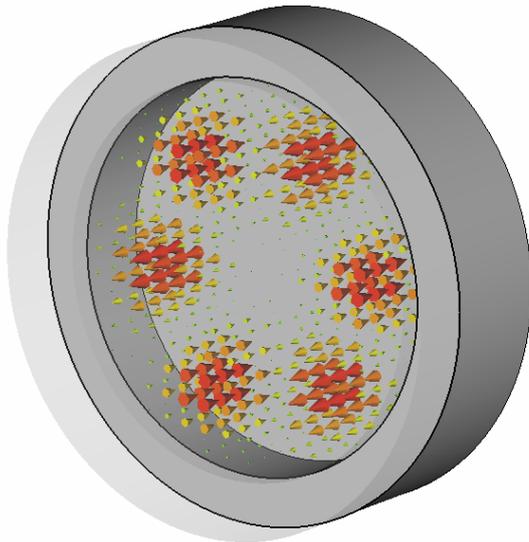
Elektrisches Feld

Magnetisches Feld

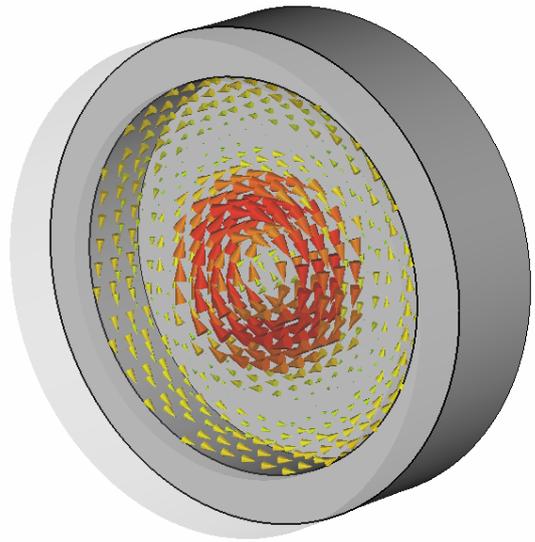
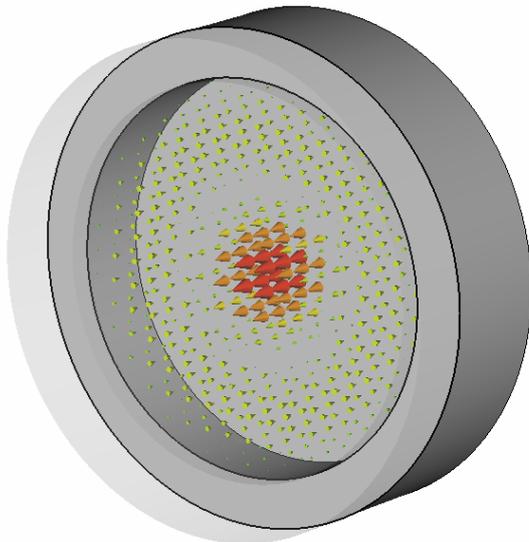
TM<sub>210</sub>



TM<sub>310</sub>



TM<sub>020</sub>

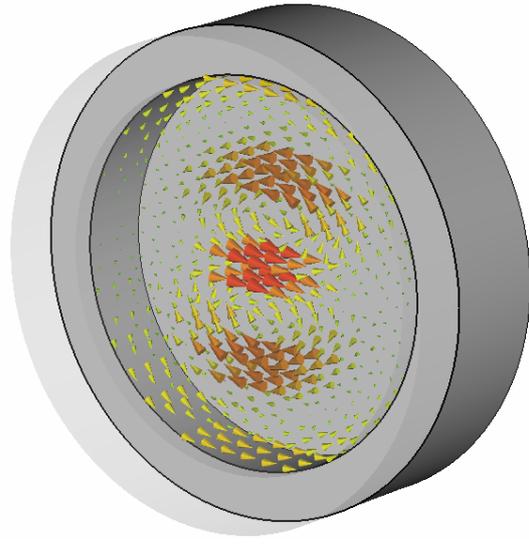
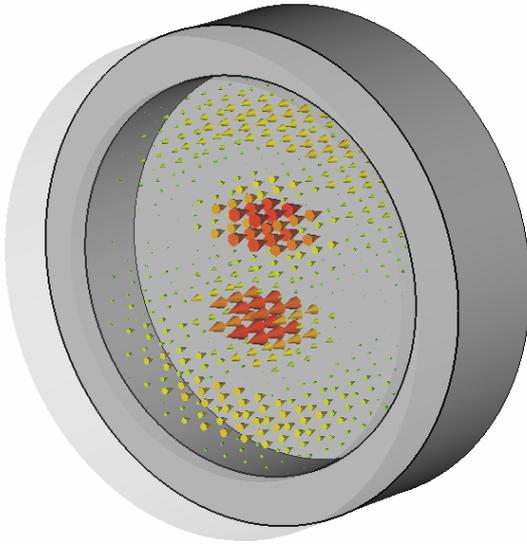


Mode

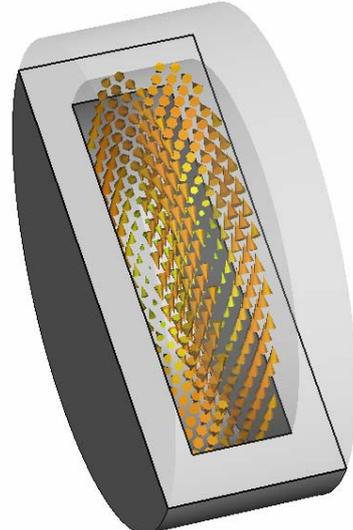
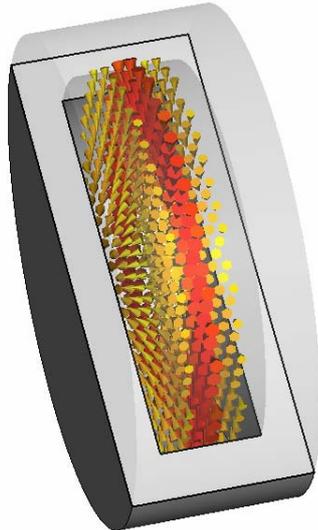
Elektrisches Feld

Magnetisches Feld

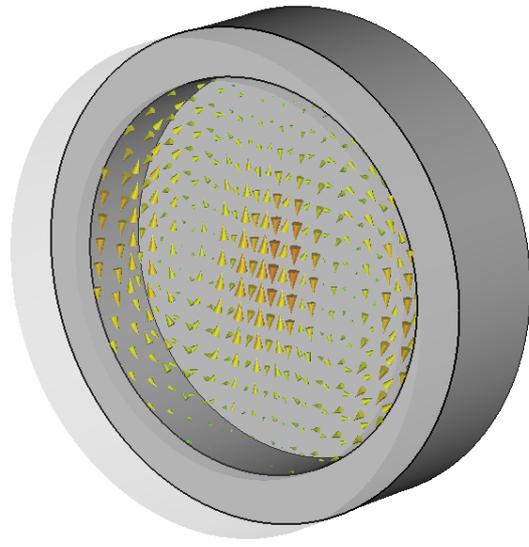
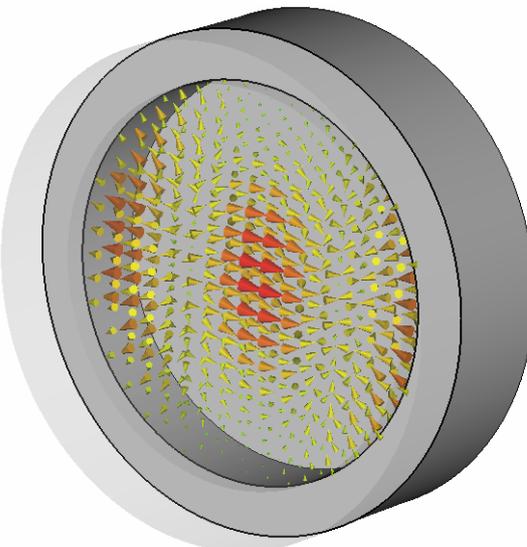
TM<sub>120</sub>



TM<sub>011</sub>



TM<sub>111</sub>

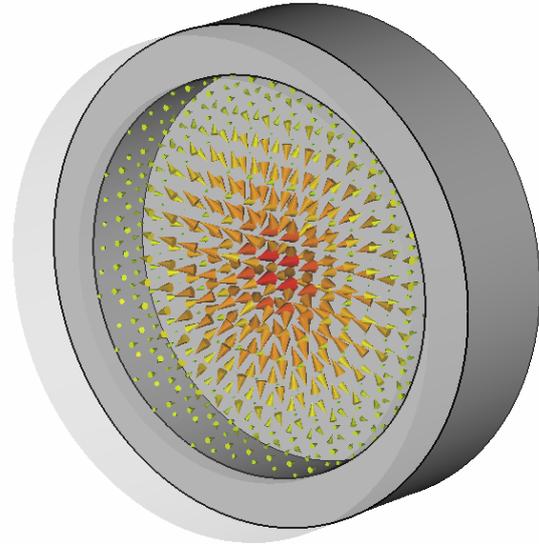
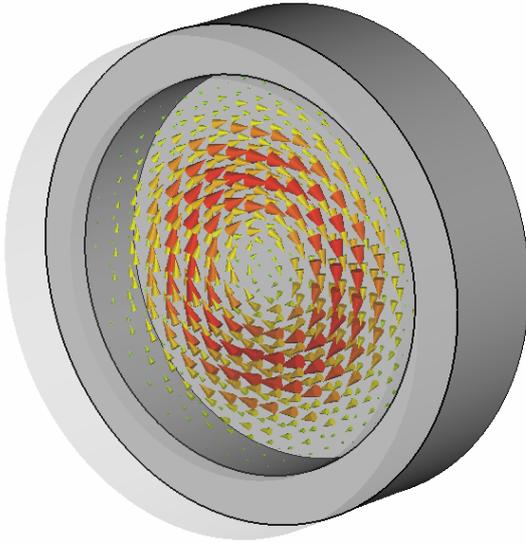


**Mode**

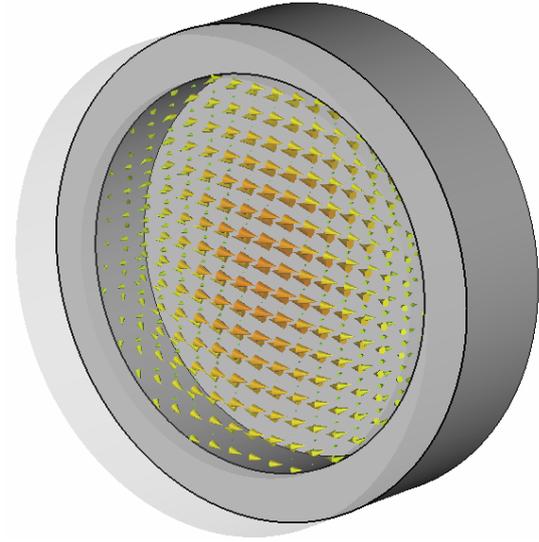
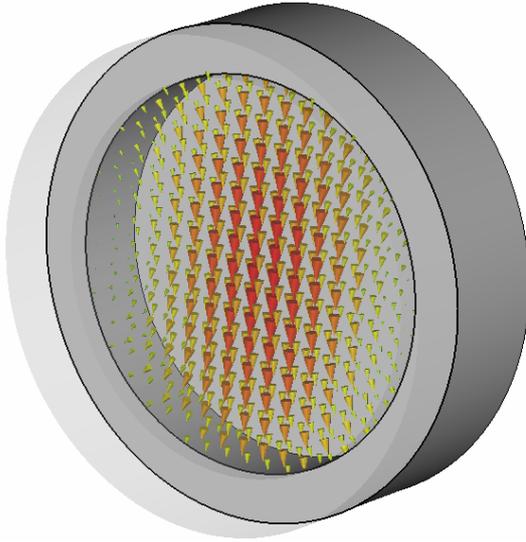
**Elektrisches Feld**

**Magnetisches Feld**

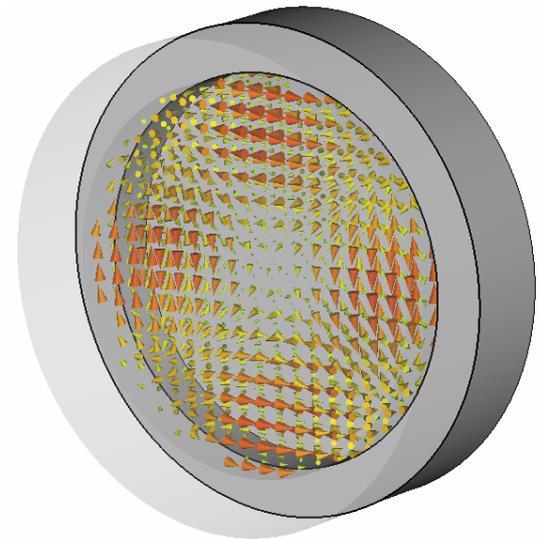
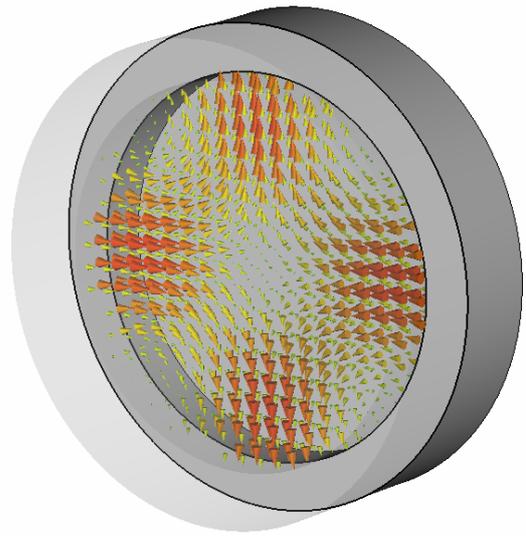
TE<sub>011</sub>



TE<sub>111</sub>



TE<sub>211</sub>

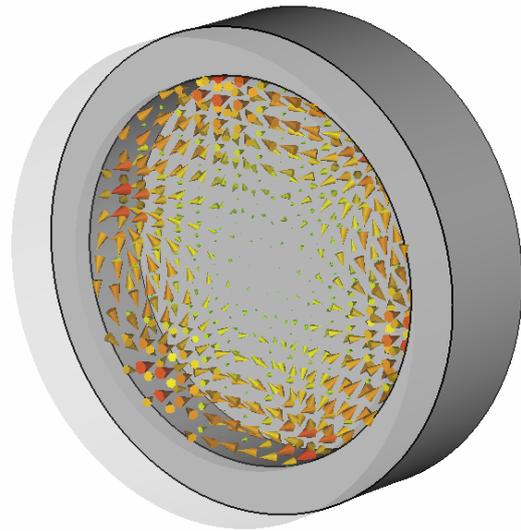
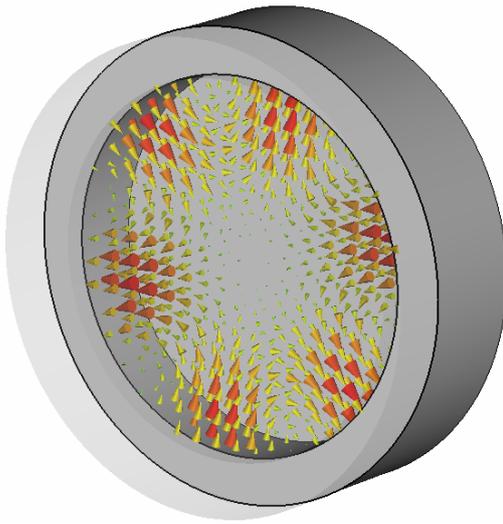


**Mode**

**Elektrisches Feld**

**Magnetisches Feld**

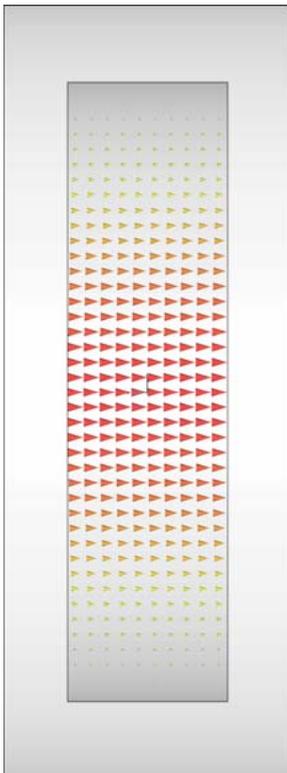
TE<sub>311</sub>



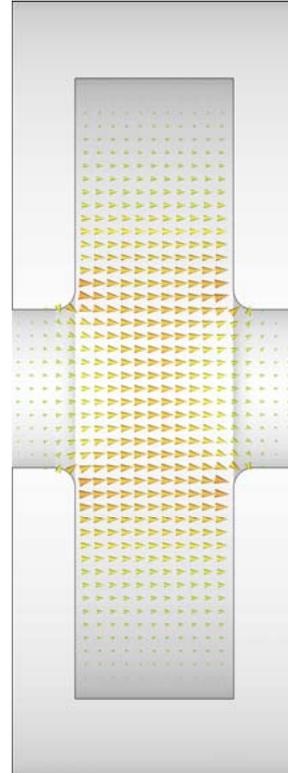
**Einfluss seitlicher Öffnungen im Resonator auf die Feldverteilung**

Die im Versuch verwendeten Resonatoren weisen seitliche Öffnungen auf, welche für die Störkörpermessungen benötigt werden. Im Vergleich zum geschlossenen Resonator ergibt sich eine andere Feldverteilung, hier am Beispiel des elektrischen Feldes der TM<sub>010</sub>-Mode (wird im Versuch bestimmt) erkennbar:

**Resonator ohne Öffnungen**



**Resonator mit Öffnungen**



## 2 Versuchsdurchführung

### 2.1 Experimenteller Aufbau

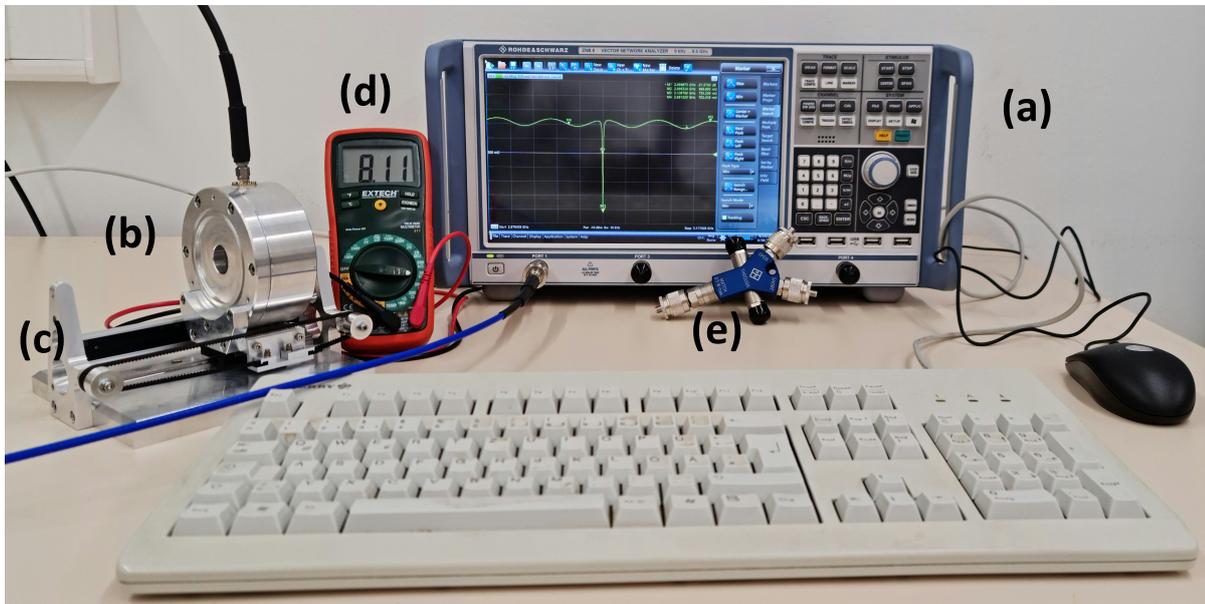


Abbildung 1: Der experimentelle Aufbau mit den wichtigsten Bestandteilen.

Der experimentelle Aufbau besteht aus (s. Abb.1):

- (a) einem vektoriellen Netzwerkanalysator,
- (b) einem zylindrischen Hohlraumresonator,
- (c) einer Messplattform für Störkörpermessung, mit der ein dielektrischer Störkörper entlang der zentralen Achse des Resonators bewegt wird, und
- (d) einem Multimeter, mit dem die genaue Position des Resonators bestimmt wird.
- (e) einem Kalibrierungsset.

### 2.2 Der Vektorielle Netzwerkanalysator

Zur Beschreibung von Hochfrequenzschaltungen werden die sogenannten Wellengrößen bevorzugt. Man unterscheidet die hinlaufende Welle  $a$  und die rücklaufende Welle  $b$ . Die hinlaufende Welle breitet sich vom Analysator zum Messobjekt aus. Die rücklaufende Welle bewegt sich in entgegengesetzter Richtung, also vom Messobjekt zum Analysator. In den folgenden Abbildungen ist die hinlaufende Welle grün und die rücklaufende Welle orange dargestellt. Die Abb.2a zeigt ein Eintor mit seinen Wellengrößen. Die zum Eintor laufende Wirkleistung ist durch  $|a|^2$  und die vom Eintor reflektierte Wirkleistung ist durch  $|b|^2$  gegeben. Der Reflexionsfaktor  $\rho$  beschreibt das Verhältnis von hinlaufender zu rücklaufender Welle. Er ist im Allgemeinen komplex und kann aus der komplexen Impedanz  $Z$  berechnet werden. Man verwendet

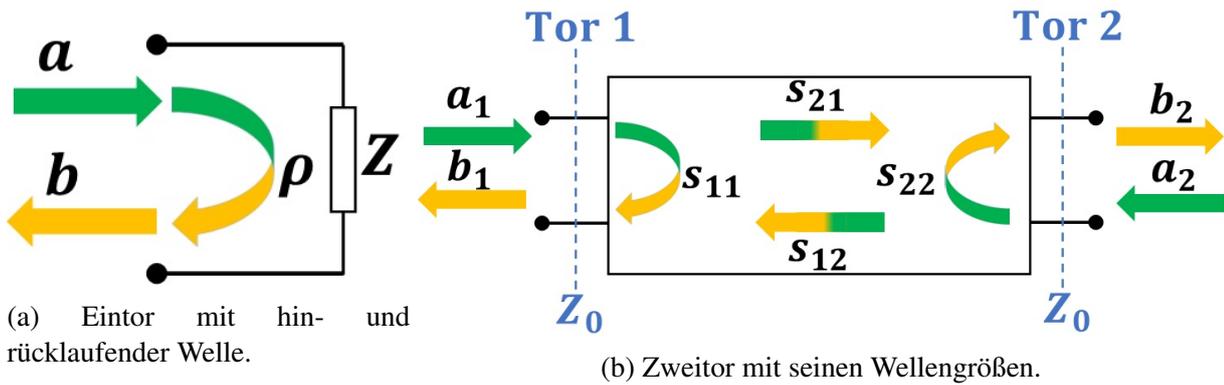


Abbildung 2: Wellengrößen und S-Parameter

dazu die normierte Impedanz  $z = Z/Z_0$  mit der Bezugsimpedanz von typisch  $Z_0 = 50 \Omega$ . Der Reflexionsfaktor  $\rho$  lässt sich in der komplexen Reflexionsfaktorebene darstellen, z.B. dem *Kurzschlusspunkt* entspricht  $\rho = -1 + 0 \cdot i$ , dem *Anpassungspunkt*  $\rho = 0 + 0 \cdot i$  und dem *Leerlaufpunkt*  $\rho = 1 + 0 \cdot i$ .

Bei einem Zweitor (vgl. Abb. 2b) besteht neben der Reflexion an den beiden Toren auch die Möglichkeit einer Transmission in Vorwärts- und Rückwärtsrichtung. Ähnlich wie zuvor der Reflexionsfaktor sind die Streuparameter (S-Parameter)  $s_{11}, s_{12}, s_{21}$  und  $s_{22}$  als Verhältnisse der beteiligten Wellengrößen definiert. Bei der Vorwärtsmessung wird ein reflexionsfreier Abschluss  $\rho = 0$  am Tor 2 verwendet. Man erzwingt damit  $a_2 = 0$ . Die Erregung erfolgt am Tor 1 durch die hinlaufende Welle  $a_1$ . Man misst unter diesen Betriebsbedingungen am Tor 1 den Eingangsreflexionsfaktor  $s_{11}$  und zwischen Tor 1 und Tor 2 den Vorwärtstransmissionsfaktor  $s_{21}$ :

$$s_{11} = \left. \frac{b_1}{a_1} \right|_{a_2=0}, \quad s_{21} = \left. \frac{b_2}{a_1} \right|_{a_2=0} \quad (1)$$

Bei der Rückwärtsmessung wird der reflexionsfreie Abschluss  $\rho = 0$  am Tor 1 verwendet ( $a_1 = 0$ ). Die Erregung erfolgt am Tor 2 durch die hinlaufende Welle  $a_2$ . Man misst unter diesen Betriebsbedingungen am Tor 2 den Ausgangsreflexionsfaktor  $s_{22}$  und zwischen Tor 2 und Tor 1 den Rückwärtstransmissionsfaktor  $s_{12}$ :

$$s_{12} = \left. \frac{b_1}{a_2} \right|_{a_1=0}, \quad s_{22} = \left. \frac{b_2}{a_2} \right|_{a_1=0} \quad (2)$$

Als eine Überlagerung der beiden Messsituationen  $a_1 = 0$  bzw.  $a_2 = 0$  kann der allgemeine Betriebsfall ( $a_1 \neq 0$  und  $a_2 \neq 0$ ) verstanden werden. Dies führt auf den Zusammenhang:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \rightarrow \vec{b} = S \cdot \vec{a} \quad (3)$$

Eine der häufigsten Messaufgaben in der Hochfrequenztechnik ist die Analyse von Schaltungen (Netzwerken). Ein Netzwerkanalysator ist dafür konzipiert, diese Aufgabe besonders exakt und effizient durchzuführen. Die Schaltungen, die mit Netzwerkanalysatoren untersucht werden, reichen von einfachen Bauteilen (z.B. Filtern, Verstärkern, ...) bis hin zu komplexen Baugruppen (z.B. Signalzüge eines Nachrichtensatelliten) oder auch Hohlraumresonatoren, die in Teilchenbeschleuniger eingesetzt werden können.

Der Netzwerkanalysator erzeugt ein sinusförmiges Testsignal, das als Anregung (z.B. *a*) auf das Messobjekt gelangt. Er misst die ebenfalls sinusförmige Reaktion (z.B. *b*) des Messobjektes. Sie weisen im Allgemeinen unterschiedliche Amplitude und Phase auf.

Ein skalarer Netzwerkanalysator erfasst nur den Amplitudenunterschied der Wellengrößen. Ein vektoriel- ler Netzwerkanalysator (VNA, Vector Network Analyzer) ist wesentlich aufwändiger in der Realisierung. Er erfasst Amplitude und Phase und ordnet ihnen einen (oder mehrere) komplexen S-Parameter zu (vgl. Gl. 3). Der Betrag  $|s_{11}|$  des S-Parameters  $s_{11} = b/a \equiv \rho$  (vgl. Kapitel 1.3) entspricht dem Amplituden- verhältnis der Wellengrößen *b* und *a*. Die Phase des S-Parameters  $\arg(\rho)$  entspricht der Phasendifferenz der Wellengrößen.

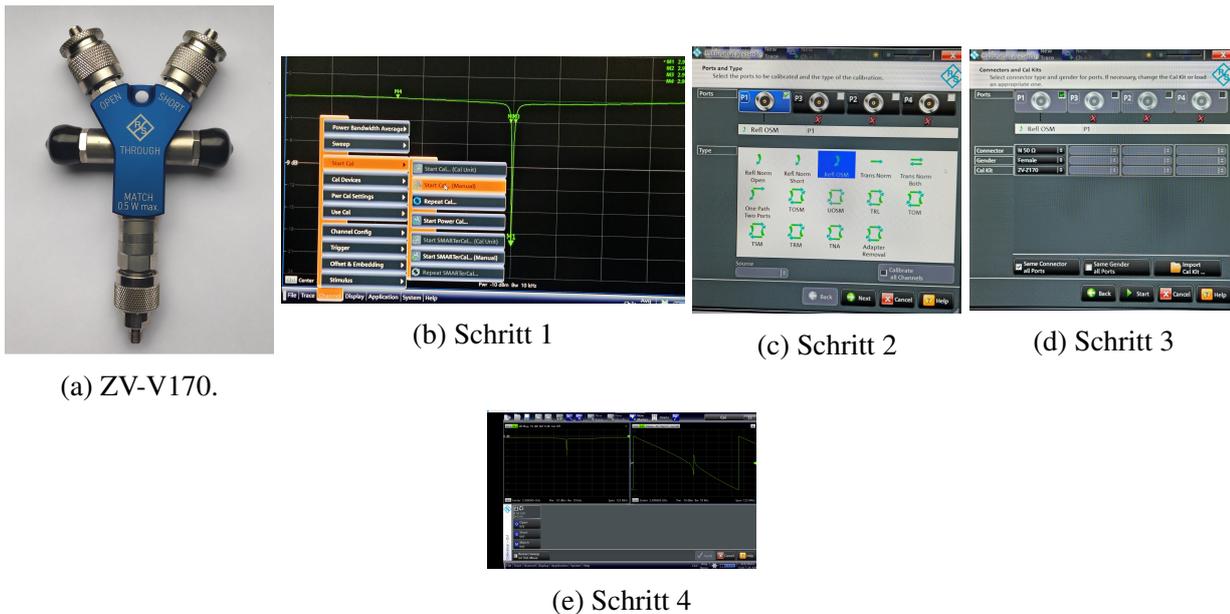


Abbildung 3: Reihenfolge der VNA Kalibrierung

## 2.3 VNA Kalibrierung

Jedes Messergebnis ist mit einer Messunsicherheit behaftet, welche die erwartete Streuung der Messwerte beschreibt. Zwei Arten von Messunsicherheiten sind zu unterscheiden:

- a) Messunsicherheiten hervorgerufen durch zufällige Messabweichungen. Diese Abweichungen können nur statistisch beschrieben, aber nicht gezielt korrigiert werden.
- b) Messunsicherheiten hervorgerufen durch systematische Messabweichungen. Diese Abweichungen treten reproduzierbar auf und können daher gezielt korrigiert werden. Eine mögliche Fehlerquelle ist z.B. die Änderung der Temperatur während der Messung. Diese führt zu der sogenannten thermischen Drift - die Messergebnisse werden zeitabhängig. Eine mögliche Lösung gegen diese thermische Störung ist eine gute thermische Stabilität der Umgebung und eine zeitliche Pause zwischen einer Messung und dem Einschalten des Netzwerkanalysators. Ferner besitzt der Verbindungskabel eine Kapazität, Induktion und einen ohmschen Widerstand, dass zu der Änderung der Amplitude und der Phase des zurückgesendeten Signals führen kann.

Ein Eintornetzwerkanalysator lässt sich mit einem *linearen Messabweichungsmodell* modellieren. Im Rahmen dieses Modells kann der VNA in ein Fehlernetzwerk (Fehlermatrix) und einen als ideal angenommenen Netzwerkanalysator aufgeteilt werden. Dieses Vorgehen ist auch auf einen N-Tor-Netzwerkanalysator übertragbar. Als Parameter des Fehlernetzwerks dienen die sogenannten Fehlerterme  $e_{ik}$ . Mit dem als Kalibrierung bezeichneten Vorgang werden die Fehlerterme  $e_{ik}$  bestimmt. Dazu werden mit der Messanordnung (Netzwerkanalysator mit montierten Messkabeln und ggf. Messfassung) der Reihe nach verschiedene Kalibrierstandards, das sind Ein- und Zweitore mit bekannten Eigenschaften, gemessen. Am häufigsten werden die folgende Kalibrierstandards verwendet: Leerlauf ( $\mathbf{0}$ , *open*), Kurzschluss ( $\mathbf{S}$ , *short*) und Abschluss ( $\mathbf{M}$ , *match*). Das Kalibrierverfahren gibt vor, welche der Eigenschaften der Standards bekannt sein müssen. Nach Abschluss der Kalibrierung berechnet der Analysator die Fehlerterme  $e_{ik}$  aus den Messwerten der Kalibrierung und den charakteristischen Daten. Mit Hilfe der Fehlerterme können bei den nachfolgenden Messungen die Rohmesswerte korrigiert und die S-Parameter des Messobjekts berechnet werden. Die physikalische Grenzlinie zwischen dem Fehlernetzwerk und dem Messobjekt wird als *Bezugsebene* bezeichnet. Die korrigierten S-Parametermesswerte beziehen sich grundsätzlich auf diese Ebene.

Eine geeignete Korrektur der systematischen Messabweichungen ist eine Voraussetzung für die präzise Durchführung des Experiments. In diesem Versuch wird ein ZV-V 170 Kalibrierungsset (vgl. Abb. 3a), mit alle drei  $\mathbf{0}$ ,  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{M}$  Kalibrierstandards, verwendet.

Die Kalibrierung wird in der folgenden Reihenfolge durchgeführt: im Funktionsbereich 'Channel' des VNA drückt man die Taste 'Cal' (vgl. Abb. 3b). Nach dem Wählen der Funktion 'Start (Manual)' wird nur ein Kanal 'P1' markiert und die Art der Messung 'Refl OSM' ausgewählt (vgl. Abb.3c). Drückt man auf 'Next', so erscheint ein Fenster, in dem den Typ des Kalibrierungssets ausgewählt werden kann' (vgl. Abb.3d). Nachdem der Befehl 'Start Cal Sweep' gewählt wurde, soll das verwendete Kabel an einem Ende mit dem Netzwerkanalysator und an einem anderen mit dem Kalibrierungsset am Ausgang 'Open' verbunden sein. Drückt man auf den Knopf 'Open' (vgl. Abb.3e), so wird die Kalibrierung durchgeführt. Nachdem der Vorgang abgeschlossen wurde, soll das Kabel an einem anderen Ausgang ('Short' oder 'Match') geschraubt werden. Die entsprechende Funktion wird auf dem Bildschirm ausgewählt. Sind alle drei Vorgänge durchgeführt, so ist die Kalibrierung abgeschlossen.

## 2.4 Messung des Reflexionspektrums

Das Ziel dieser Übung ist das Spektrum des Reflexionsfaktors in einem sehr breitem Frequenzbereich zu messen, die Grundfrequenz zu bestimmen, einige Resonatormoden höherer Ordnung zu identifizieren und deren Frequenzen abzuschätzen.

### VNA-Einstellung:

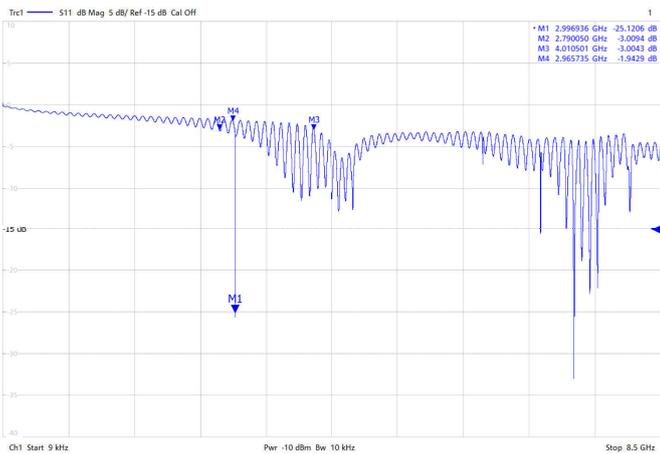
*Funktionsbereich Channel* → *Stimulus* → *Start Frequency* → 9 kHz danach

*Funktionsbereich Channel* → *Stimulus* → *Stop Frequency* → 8.5 GHz und

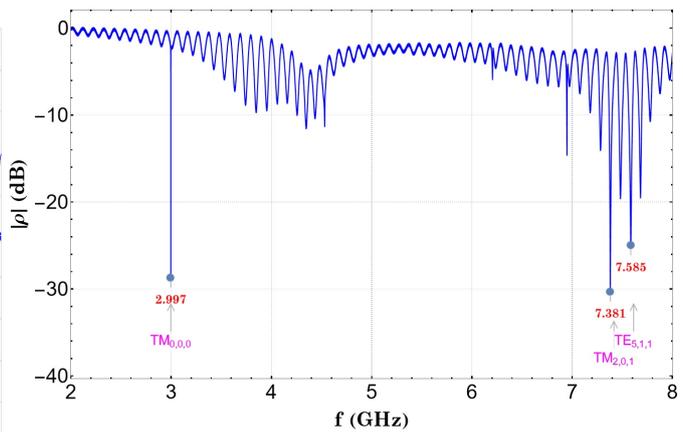
*Funktionsbereich Channel* → *Sweep* → *Number of Points* → 100 000

*Funktionsbereich Trace* → *Scale* → *Autoscale Trace*

**Daten Exportieren:** *Funktionsbereich File* → *Trace Data* → *Export ASCII*. Die exportierte Datei besteht



(a) Spektrum des Reflexionsfaktors.



(b) Bestimmung der Grundfrequenz und einige mögliche Resonatormoden höherer Ordnung.

Abbildung 4: Messung des Reflexionspektrums

aus drei 'Spalten' - Frequenz [Hz],  $Re(\rho)$  und  $Im(\rho)$ .

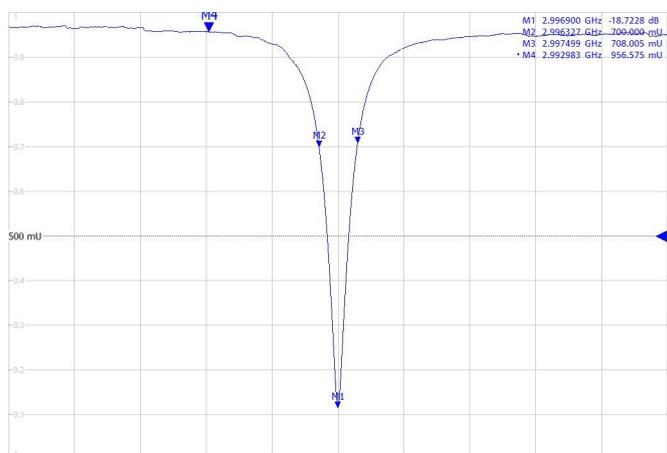
Auf dem Bildschirm ist nun das Spektrum zu sehen, so wie in Abb. 4a. Exportieren Sie die Daten und bestimmen Sie:

- die Grundfrequenz  $f_0$  (vgl. Abb.4b),
- den Fehler der Grundfrequenz  $\sigma_{f_0}$ ,
- den Radius  $a$  des Resonators sowie den Fehler  $\sigma_a$ .

Versuchen Sie auch einige Resonatormoden höherer Ordnung zu identifizieren. Verwenden Sie dabei die Formel aus S. 8, 9, die Graphik aus S. 9 sowie die Tabelle aus S. 10.

## 2.5 Skalare Messung von $|\rho|$

(a) Beispiel skalare Messung von  $|\rho|$ .



(b) Beispiel Datenverarbeitung.

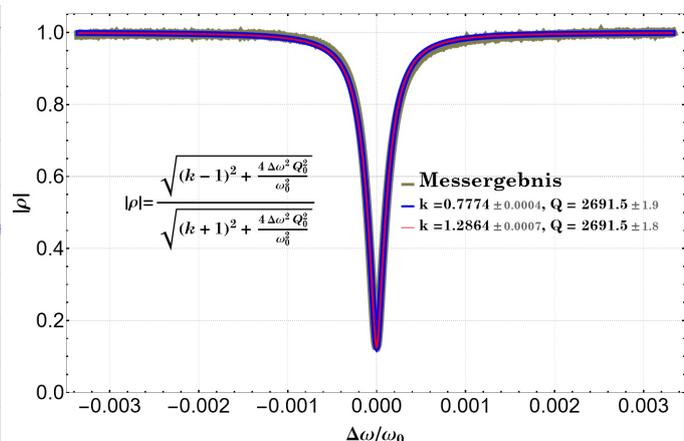


Abbildung 5: Bestimmung von  $k$  und  $Q$

Das Ziel dieser Übung ist die belastete- und die unbelastete Güte  $Q$  bzw.  $Q_0$  sowie den Kopplungsfaktor  $k$  zu bestimmen.

**VNA-Einstellung:**

*Funktionsbereich Channel* → *Stimulus* → *Start Frequency* →  $f_0 - 10 \text{ MHz}$ ,

*Funktionsbereich Channel* → *Stimulus* → *Stop Frequency* →  $f_0 + 10 \text{ MHz}$ ,

*Funktionsbereich Channel* → *Sweep* → *Number of Points* → 2000,

*Funktionsbereich Trace* → *Format* → *Lin Mag*,

*Funktionsbereich Trace* → *Scale* → *Autoscale Trace*

wobei  $f_0$  die in 2.4 bestimmte Grundfrequenz ist. Auf dem Bildschirm ist nun die Resonanzkurve zu sehen, so wie im Beispiel in Abb. 5a. Exportieren Sie die Daten und bestimmen Sie:

- (i) die Kopplung  $k$ , so wie es auf S. 20 diskutiert wurde. Beachten Sie, dass es zwei mögliche Ergebnisse  $k_1$  und  $k_2$  geben kann - die erste entspricht  $\rho(f_0) < 0$  und die zweite  $\rho(f_0) > 0$ , d.h.  $k_1 < 1$  und  $k_2 > 1$ ,
- (ii) die 'Halbwertsbreite'  $\Delta\omega$  (die richtige Höhe beachten! S. 20), die belastete- und die unbelastete Güte  $Q$  bzw.  $Q_0$ ,

- (iii) gleichzeitig  $k$  und  $Q_0$  indem Sie die gemessene  $|\rho(\Delta\omega)|$  zu  $\frac{\sqrt{(k-1)^2 + \frac{4\Delta\omega^2 Q_0^2}{\omega_0^2}}}{\sqrt{(k+1)^2 + \frac{4\Delta\omega^2 Q_0^2}{\omega_0^2}}}$  fitten, so wie im Beispiel in Abb. 5b gezeigt.

- (iv) die Fehler von  $k$  und  $Q_0$ .

*Hinweis:* Wie in der statistischen Vorlesung besprochen, verwenden Sie im Fall (iii) die Inverse der Matrix der doppelten partiellen Ableitungen  $G_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial a_i \partial a_j} \chi^2(\vec{a})$ , mit  $\vec{a} = (k, Q_0)$ . Dabei dürfen Sie auch das auf dem Versuchs-PC vorhandene *Mathematica*-Skript benutzen.

## 2.6 Vektorielle Messung des Reflexionsfaktors

Das Ziel dieser Übung ist die belastete- und die unbelastete Güte  $Q$  bzw.  $Q_0$ , den Kopplungsfaktor  $k$  sowie Kabellänge  $L$  und die Wellenlänge im Kabel  $\lambda$  zu bestimmen.

**VNA-Einstellung:**

*Funktionsbereich Channel* → *Stimulus* → *Start Frequency* →  $f_0 - 100 \text{ MHz}$ ,

*Funktionsbereich Channel* → *Stimulus* → *Stop Frequency* →  $f_0 + 100 \text{ MHz}$ ,

*Funktionsbereich Channel* → *Sweep* → *Number of Points* → 20000,

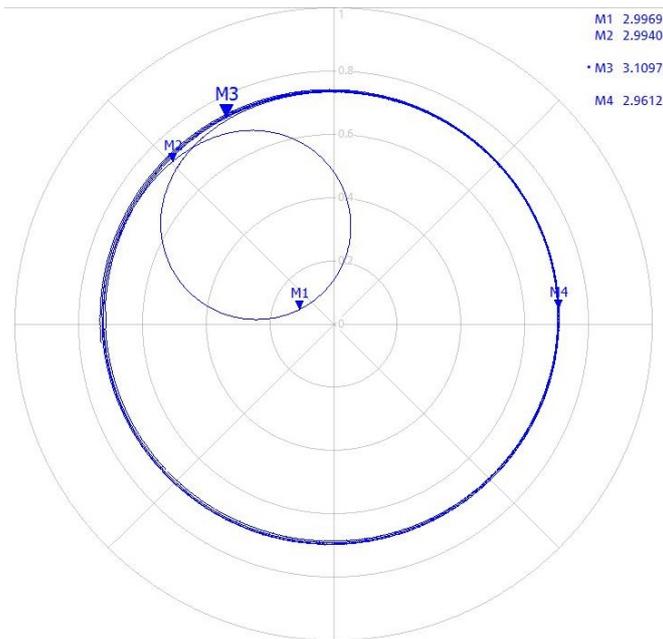
*Funktionsbereich Trace* → *Format* → *Polar*,

*Funktionsbereich Trace* → *Scale* → *Autoscale Trace*

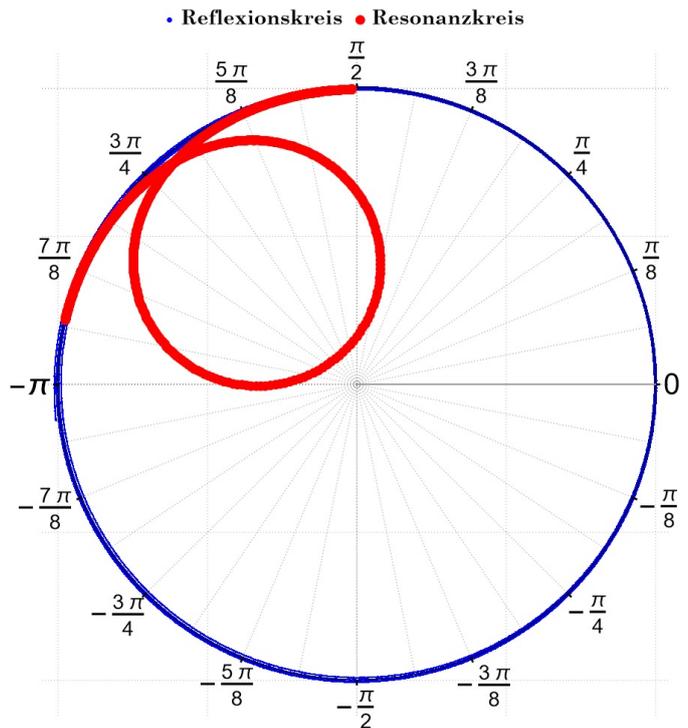
wobei  $f_0$  die in 2.4 bestimmte Grundfrequenz ist. Auf dem Bildschirm ist nun die Resonanzkurve zu sehen, so wie im Beispiel in Abb. 6a. Exportieren Sie die Daten und dann:

- (a) Zentrieren Sie die Messdaten, sodass das Zentrum des Reflexionskreises sich im Koordinatenursprung der Komplexen-Ebene befindet,

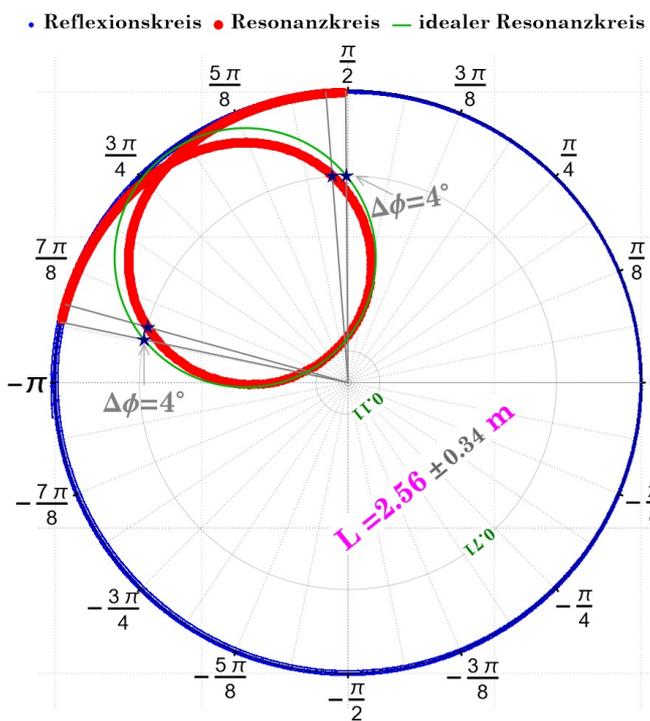
(a) Beispiel vektorielle Messung von  $\rho$ .



(b) Messdaten zentriert und normiert.



(c) Bestimmung von  $k, Q$  sowie der Kabellänge  $L$  durch Vergleich mit dem idealen Reflexionskreis.



(d) Bestimmung von  $k, Q$  sowie der Kabellänge  $L$  mittels Regression.

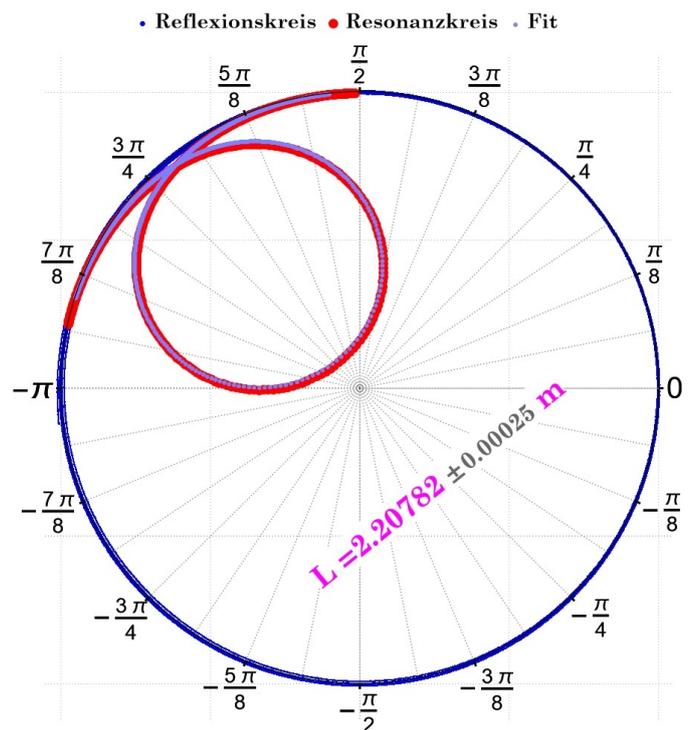


Abbildung 6: Datenverarbeitung der vektoriellen Messung des Reflexionsfaktors

(b) Normieren Sie das Koordinatensystem, sodass für den Reflexionskreis  $|\rho| = 1$  (s. Abb. 6b),

(c) Bestimmen Sie den  $m$ -Kreis  $m_{min}$  der dem  $\min(|\rho|)$  im Resonanzkreis entspricht. Im in Abb. 6c

gezeigten Beispiel ist das  $m_{min} = 0.11$ ,

- (d) Bestimmen Sie den Kopplungsfaktor  $k$ . Verwenden Sie dabei die Formel aus S. 26 und beachten dass der Abstand  $d$  mit einem Vorzeichen behaftet ist,
- (e) Bestimmen Sie den  $m$ -Kreis  $m_{FWHM}$  der  $\rho = -\frac{1}{k+1} \mp i\frac{k}{k+1}$  entspricht (vgl. Formel aus S. 27). Im in Abb. 6c gezeigten Beispiel ist das  $m_{FWHM} = 0.71$ ,
- (f) Bestimmen Sie die 'Halbwertsbreite'  $\Delta f$  d.h. den Frequenzunterschied der beiden Schnittpunkten zwischen  $m_{FWHM}$  und dem realen Resonanzkreis,
- (g) Bestimmen Sie die belastete- und die unbelastete Güte  $Q = \frac{f_0}{\Delta f}$  bzw.  $Q_0 = (1+k)Q$ . Für das Beispiel in Abb. 6c beträgt  $k = 0.800 \pm 0.002$ ,  $Q = 2462 \pm 20$ ,
- (h) Bestimmen Sie den Zwischenwinkel  $\Delta\phi$  zwischen Verbindungsgeraden zwischen Ursprung und den Punkten  $f_0 - \Delta f/2$  auf dem realen und idealen Resonanzkreis. Im Beispiel in Abb. 6c beträgt  $\Delta\phi = (4.0 \pm 0.5)^\circ$  (vgl. S. 30,31),
- (i) Bestimmen Sie die Kabellänge  $L_1 = \frac{\Delta\phi}{2\pi} Q \lambda_0$ , wobei  $\lambda_0 = c/f_0$  die Vakuumwellenlänge ist (vgl. S. 30,31). Im gegebenen Beispiel beträgt  $L_1 = (2.56 \pm 0.34)$  m.
- (j) Bestimmen Sie gleichzeitig  $k$ ,  $Q_0$  und Kabellänge  $L_2$  indem Sie die Messdaten zu

$$\rho(\Delta f) = e^{-\frac{i4\pi L_2(\Delta f + f_0)}{c} \frac{k-1-2i\Delta f Q_0}{k+1+\frac{2i\Delta f Q_0}{f_0}}}$$

fitten (vgl. S. 18). Im Beispiel in Abb. 6d ergibt dies die folgenden Werte:  $k = 0.7862 \pm 0.0003$ ,  $Q_0 = 4924 \pm 2$  und  $L_2 = (2.2079 \pm 0.0003)$  m,

- (k) Betrachten Sie nun die 'wahre' Kabellänge  $L_0$  (gemessen z.B. mit einem Maßband). Vergleichen Sie  $L_0$  und  $L_1$  bzw.  $L_2$  und schätzen Sie die Wellenlänge  $\lambda$  im Kabel ab. Im Beispiel in Abb. 6d beträgt  $L_0 = 2,0$  m und somit ist  $\lambda \approx \frac{L_0}{L_1} \lambda_0 \approx 0.8 \lambda_0$ , d.h. die Ausbreitungsgeschwindigkeit des elektrischen Signals beträgt  $0.8c$ .

- (l) Berechnen Sie die Fehler von  $k$ ,  $Q$ ,  $Q_0$ ,  $L_{1,2}$  und  $\lambda$ .

*Hinweis:* Wie in der statistischen Vorlesung besprochen, verwenden Sie im Fall (j) die Inverse der Matrix der doppelten partiellen Ableitungen  $G_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial a_i \partial a_j} \chi^2(\vec{a})$ , mit  $\vec{a} = (k, Q_0, L)$ . Dabei dürfen Sie auch das auf dem Versuchs-PC vorhandene *Mathematica*-Skript benutzen.

## 2.7 Störkörpermessung

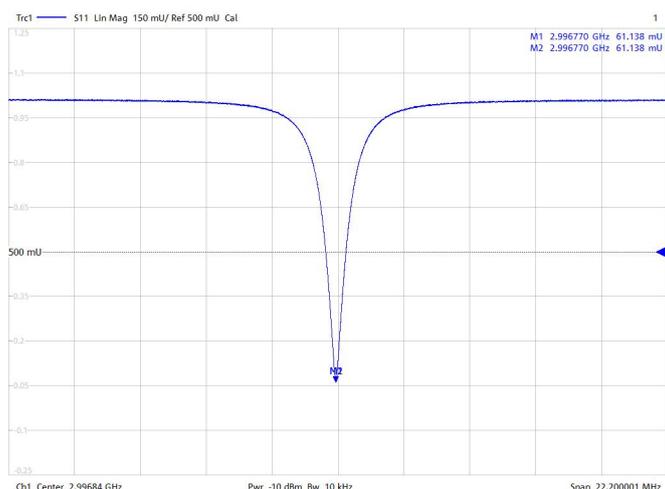
Das Ziel dieser Übung ist sowohl die elektrische Feldverteilung  $E(z)$  auf der Resonatorachse als Funktion der longitudinalen Position  $z$  mittels resonanter- und nicht resonanter Störkörpermessung als auch die Shuntimpedanz  $R_s$  und den Laufzeitfaktor  $\Lambda$  zu bestimmen.

**VNA-Einstellung** (Kalibrierung vorausgesetzt):

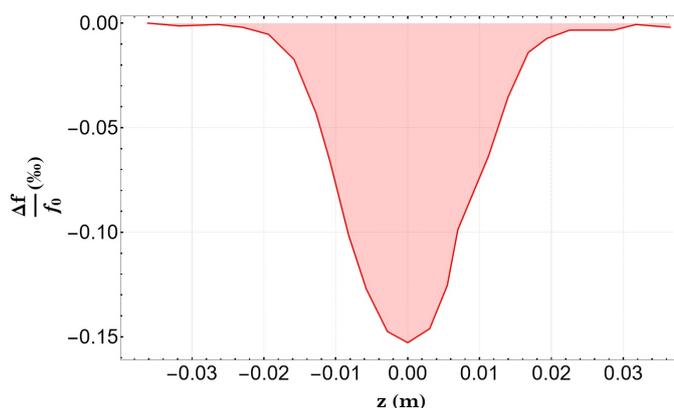
Funktionsbereich Channel  $\rightarrow$  Stimulus  $\rightarrow$  Start Frequency  $\rightarrow f_0 - 10$  MHz,

Funktionsbereich Channel  $\rightarrow$  Stimulus  $\rightarrow$  Stop Frequency  $\rightarrow f_0 + 10$  MHz,

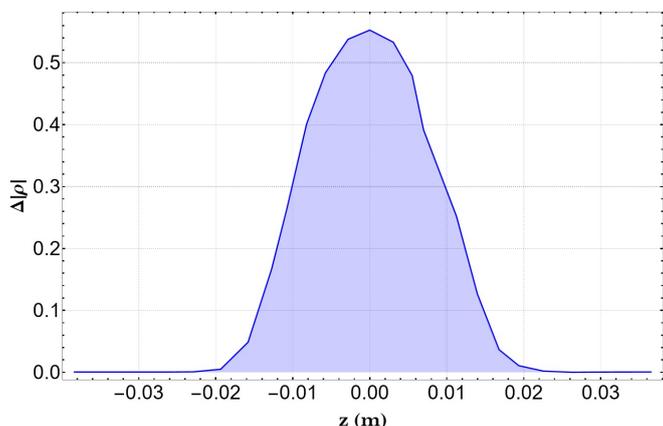
(a) Beispiel für VNA-Anzeige während der Störkörpermessung.



(b) Beispiel: Messung von  $\frac{f_0 - f(z)}{f_0}$ .



(c) Beispiel: Messung von  $|\Delta\rho|$ .



(d) Bestimmung von  $E(z)$  mittels resonanter- und nicht resonanter Störkörpermessung.

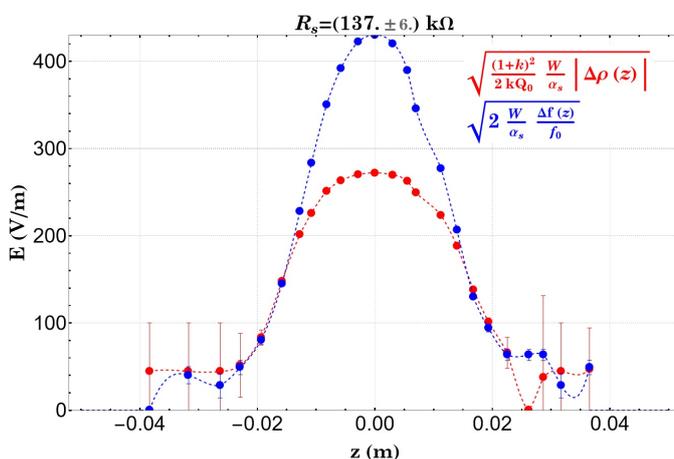


Abbildung 7: Datenverarbeitung der Störkörpermessung.

*Funktionsbereich Channel*→Sweep→Number of Points→2000,

*Funktionsbereich Trace*→Format→Lin Mag,

*Funktionsbereich Trace*→Marker→Mkr1→Marker Search→Min,

*Funktionsbereich Trace*→Marker→Mkr1→Search Mode→Min,

*Funktionsbereich Trace*→Marker→Mkr1→Marker Props→Marker Format→Lin Mag,

*Funktionsbereich Trace*→Marker→Mkr2→Marker Search→Min,

*Funktionsbereich Trace*→Marker→Mkr2→Search Mode→None,

*Funktionsbereich Trace*→Marker→Mkr2→Marker Props→Marker Format→Lin Mag,

*Funktionsbereich Trace*→Scale→Autoscale Trace

Auf der Messpaltform (Abb. 1 (c)) ist eine  $140\ \mu\text{m}$  dünne Nylonschnur parallel zur Resonatorachse gespannt. Auf die Nylonschnur ist eine Glassperle (der Störkörper) mit  $r=1\ \text{mm}$  und  $\epsilon_r = 2$  aufgefädelt. Das Multimeter (vgl. Abb. 1(d)) soll eingeschaltet werden und der Resonator so verschoben, dass am An-

fang bei  $z = 0$  cm der Abstand zum Störkörper ungefähr 3 cm beträgt. Die Resonatorposition  $z$  lässt sich kontinuierlich mit dem eingebauten Zahnriemen einstellen. Der Resonator ist mit einem Potentiometer mechanisch gekoppelt, sodass die Resonatorposition  $z$  linear mit dem Potenziometerwiderstand  $R(z)$  korreliert:  $z = a \cdot R(z) - b$ . Dabei betragen  $a = 1,225 \frac{\text{cm}}{\text{k}\Omega}$ ,  $b = 1,054$  cm und der Potenziometerwiderstand wird mit dem Multimeter gemessen, d.h. die Position des Resonators ist zu jedem Zeitpunkt durch die obige Beziehung definiert.

Die typische Anzeige auf dem VNA-Bildschirm (s. Abb. 7a) während der Störkörpermessung ist ähnlich der skalaren Messung von  $|\rho|$ . Durch Einbringen des Störkörpers wird eine Verschiebung der Resonanzfrequenz ( $f_0 \rightarrow f$ ) und eine Veränderung des Reflexionsfaktors  $|\rho_0(f_0)| \rightarrow |\rho(f_0)|$  bei unveränderter Anregung  $f_0$  erwartet (vgl. S.34, 35). Die Marker M1 und M2 sind so eingestellt, dass M1 immer die verschobene Resonanzfrequenz  $f$  und M2 den Reflexionsfaktor  $|\rho(f_0)|$  zeigt. Somit wird die relative Frequenzverschiebung  $\frac{f_0 - f(z)}{f_0}$  sowie  $\Delta|\rho|(z) = |\rho(f_0, z)| - |\rho(f_0, 0)|$  als Funktion der Resonatorposition gemessen.

Versuchsdurchführung:

- (a) Messen Sie  $\frac{f_0 - f(z_i)}{f_0}$  und  $\Delta|\rho|(z_i)$  für  $z_i \in [0, 7]$  cm und  $i = 1..N$ , wobei  $N \geq 20$  und die Messpositionen  $z_i$  möglichst gleichmässig verteilt werden sollen,
- (b) Stellen Sie die Messergebnisse graphisch dar (vgl. Abb. 7b und 7c),
- (c) Berechnen Sie  $E(z)$  sowohl für die resonante als auch für die nichtresonante Messung und stellen Sie die Messergebnisse graphisch dar (vgl. Abb. 7d),
- (d) Berechnen Sie die Schuntimpedanz  $R_s$ ,
- (e) Diskutieren Sie die Messfehler der beiden Messungen,
- (f) Diskutieren Sie die systematische Fehler der nichtresonanten Störkörpermessung,
- (g) Berechnen Sie den Laufzeitfaktor  $\Lambda_s$ .