4. 2-dim CFT

4.1. Notation, Kinematik

Minkowski

$$x^+ = x^1 + x^0 \qquad \partial_\pm = \tfrac{1}{2}(\partial_1 \mp \partial_0), \quad \partial_1 = \partial_+ + \partial_-, \quad \partial_0 = \partial_+ - \partial_-$$
$$x^- = x^1 - x^0$$

$$ds^2 = (dx^1)^2 - (dx^0)^2 = dx^+ dx^- \qquad \text{d.h.} \quad \boxed{\eta_{+-} = 1/2, \ \eta_{++} = \eta_{--} = 0}$$

$$T_{++} = 1/2\,(T_{1+} - T_{0+})$$
$$= 1/4\,(T_{11} - T_{10} - T_{01} + T_{00})$$

$$T_{++} = 1/4\,(T_{11} + T_{00} - 2T_{01}) \quad \text{analog} \quad T_{--} = 1/4\,(T_{11} + T_{00} + 2T_{01})$$

$$T_{+-} = 1/4\,(T_{11} - T_{00})$$

Konforme Invariant: $T^\mu{}_\mu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{T_{+-} = 0}$

E-I-Erhaltung

$$\partial^\mu T_{\mu\pm} = \eta^{\mu\nu}\partial_\nu T_{\mu\pm} \Rightarrow \eta^{+-}\partial_- T_{++} = 0$$
$$\eta^{-+}\partial_+ T_{--} = 0$$

$\Rightarrow$ T_{++} und T_{--} sind chiral $\boxed{\begin{aligned} T_{++} &= T_{++}(x^+) \\ T_{--} &= T_{--}(x^-) \end{aligned}}$

spezielle Konforme Trafo:

$$x^\mu \to \frac{x^\mu + c^\mu x^2}{1 + 2cx + c^2x^2} \quad \text{d.h.} \quad x^+ \to \frac{x^+ + c^+x^+x^-}{1 + c^+x^- + c^-x^+ + c^+c^-x^+x^-} = \frac{x^+(1+c^+x^-)}{(1+c^-x^+)(1+c^+x^-)}$$

$$x^- \to \frac{x^- + c^-x^+x^-}{1 + c^+x^- + c^-x^+ + c^+c^-x^+x^-}$$

d.h. $x^+ \to \frac{x^+}{1+c^- x^+}$

$x^- \to \frac{x^-}{1+c^+ x^-}$

Dilatationen $x^+ \to \lambda x^+$, $x^- \to \lambda x^-$

Translation $x^+ \to x^+ + a^+$, $x^- \to x^- + a^-$

Lorentztrafo $x^+ \to e^{\eta} x^+$, $x^- \to e^{-\eta} x^-$ $\left\{ \begin{array}{l} x^1 \to x^1 \cosh\eta + x^0 \sinh\eta \\ x^0 \to x^0 \cosh\eta + x^1 \sinh\eta \end{array} \right.$

Kombi von Dilat. & Lorentztrafo: $\left. \begin{array}{l} x^+ \to \lambda e^{\eta} x^+ =: \rho^+ x^+ \\ x^- \to \lambda e^{-\eta} x^- =: \rho^- x^- \end{array} \right\} (*)$

<u>Sehen</u>: – Keine Mischung von x^+, x^- unter konformen Trafos (bei Kombi à la $(*)$!!)

– Für Trafo von x^+ drei reelle Parameter c^-, a^+, ρ^+ ← unabhängig

analog x^- : c^+, a^-, ρ^- ↙

$$\Rightarrow \boxed{SO(2,2) \sim \underbrace{SL(2,\mathbb{R})}_{\mathbb{Z}_2} \times \underbrace{SL(2,\mathbb{R})}_{\mathbb{Z}_2}}$$

$SL(2,\mathbb{R})$: $x \to \frac{ax+b}{cx+d}$; $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, $ad-bc=1$

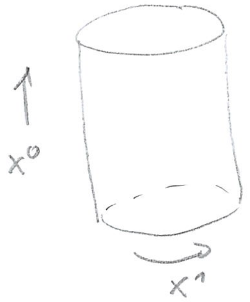
Wirkung von $SL(2,\mathbb{R})$ auf reeller Achse wird eineindeutig nach Kompaktifizierung $\mathbb{R} \cup \infty \sim S^1$. Das entspricht genau der in 1.2, S. 15a diskutierten Toruskompaktifizierung des 2D-Minkowskiraumes.

Die wegen $N=2$ zusätzlichen ∞-viele ~~weiteren~~ konf. Trafo sind dann $x^\pm \to f^\pm(x^\pm)$. Dann ist (nach Toruskomp.)

$$\boxed{\text{Konforme Gruppe} \sim \mathrm{Diff}(S^1) \times \mathrm{Diff}(S^1)}$$

Zylinder mit Lorentz-Signatur

d.i. insbesondere relevant für geschlossene Strings



& alle Felder: $\varphi(x^0, x^1+2\pi) = \varphi(x^0, x^1)$

Konforme Killinggleichung sieht dann lokal so aus wie im Minkowskiraum $\Rightarrow$ $x^\pm \to f^\pm(x^\pm)$ sind Lsg.

$$\Rightarrow \boxed{\text{Konforme Gruppe } \mathbb{R}\times S^1\big|_{\text{Lorentz}} \sim \mathrm{Diff}(S^1)\times \mathrm{Diff}(S^1)}$$

Bemerkungen: – Wegen der allg. Periodizitätsbed. müssen alle chiralen Felder periodisch sein!

$$f(x^\pm + 2\pi) = f(x^1 \pm x^0 + 2\pi) = f(x^1 \pm x^0) = f(x^\pm)$$

– Diffeomorphismen von S^1 haben die Form (bei $x \sim x+2\pi$)

$$x \to f(x), \quad f(x+2\pi) = f(x) + 2\pi, \quad f' > 0$$

bzw mit $f(x) = x + h(x)$ $\Leftrightarrow$ $h(x+2\pi) = h(x)$

$$1 + h'(x) > 0$$

Euklidisch $\mathbb{R}^2$

$$z^+ = z = x^1 + i x^2 \qquad \partial = \tfrac{1}{2}(\partial_1 - i\partial_2) \qquad \partial_1 = \partial + \bar\partial$$

$$z^- = \bar z = x^1 - i x^2 \qquad \bar\partial = \tfrac{1}{2}(\partial_1 + i\partial_2) \qquad \partial_2 = i(\partial - \bar\partial)$$

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 = dz\, d\bar z$$

d.h. $\eta_{++} = \eta_{--} = 0, \; \eta_{+-} = 1/2$

$$T_{++} = \tfrac{1}{2}(T_{1+} - i T_{2+}) = \tfrac{1}{4}(T_{11} - i T_{12} - i T_{21} - T_{22})$$

$$T_{++} = \tfrac{1}{4}(T_{11} - T_{22} - 2i T_{12}) \qquad T_{+-} = \tfrac{1}{4}(T_{11} + T_{22})$$

$$T_{--} = \tfrac{1}{4}(T_{11} - T_{22} + 2i T_{12})$$

konforme Invariante $T_{+-} = 0$

E-I-Erhaltung $T_{++} = T_{++}(z)$ i.e. T_{++} holomorph

$T_{--} = T_{--}(\bar z) = \overline{T(z)}$

27.05.10

Spezielle konforme Trafo:

analog zu Minkowski $z \to \dfrac{z}{1 + cz}$

$\bar z \to \dfrac{\bar z}{1 + \bar c \bar z}$

zusammen mit Dil, Transl, Lorentztrafo:

keine Mischung von z und $\bar z$

$SO(1,3) \sim SL(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$ $\qquad z \to \dfrac{az+b}{cz+d}, \quad a,b,c,d \in \mathbb{C}$, $ad - bc = 1$

Möbiusgruppe

Trafoverhalten von Quasiprimaries unter $SO(2,2)$ (bzw. $SO(1,3)$ euklid.)

Hatten allg. (Kap 3.1., S.43)

$$U(R)\,\varphi_i(x')\,U^{-1}(R) = \left|\det\frac{\partial x'}{\partial x}\right|^{-\frac{d}{N}} D_i{}^j(R)\,\varphi_j(x)$$

$$R^\alpha{}_\beta = \frac{\partial_\beta x'^\alpha}{\left|\det\frac{\partial x'}{\partial x}\right|^{1/2}}$$

Jetzt hängt das $\det\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial x'^+}{\partial x^+}\frac{\partial x'^-}{\partial x^-}$, siehe RS. 62

$\Rightarrow$ Skalar

$$U(R)\,\varphi(x')\,U^{-1}(R) = \left(\partial_+ x'^+\,\partial_- x'^-\right)^{-\frac{d}{2}}\varphi(x) \quad \text{Minkowski}$$

$$U(R)\,\varphi(z',\bar z')\,U^{-1}(R) = \left(\partial z'\,\bar\partial\bar z'\right)^{-d/2}\varphi(z,\bar z) \quad \text{Euklidisch}$$

Vektor, kontravariant $D(R) = R$

$$U(R)\,\varphi^+(x')\,U^{-1}(R) = \left(\partial_+ x'^+\cdot\partial_- x'^-\right)^{-d/2}\frac{\partial_+ x'^+}{\left(\partial_+ x'^+\partial_- x'^-\right)^{1/2}}\,\varphi^+(x)$$

$$= \left(\partial_+ x'^+\right)^{-\frac{d-1}{2}}\left(\partial_- x'^-\right)^{-\frac{d+1}{2}}\varphi^+(x)$$

und

$$U(R)\,\varphi^-(x')\,U^{-1}(R) = \left(\partial_+ x'^+\right)^{-\frac{d+1}{2}}\left(\partial_- x'^-\right)^{-\frac{d-1}{2}}\varphi^-(x)$$

Vektor, kovariant $\varphi_+ = \eta_{+-}\varphi^-$ etc

$$\Rightarrow \quad U(R)\,\varphi_+(x')\,U^{-1} = \left(\partial_+ x'^+\right)^{-\frac{d+1}{2}}\left(\partial_- x'^-\right)^{-\frac{d-1}{2}}\varphi_+(x)$$

$$U(R)\,\varphi_-(x')\,U^{-1} = \left(\partial_+ x'^+\right)^{-\frac{d-1}{2}}\left(\partial_- x'^-\right)^{-\frac{d+1}{2}}\varphi_-(x)$$

Sprechweise: φ_+ hat Spin 1
φ_- hat Spin -1

Nach Verallg. auf allg. Tensorkomponenten

$$\boxed{U(k)\,\varphi(x')\,U^{-1}(k) = (\partial_+ x'^+)^{-\frac{d+s}{2}} (\partial_- x'^-)^{-\frac{d-s}{2}} \varphi(x)} \quad (*)$$

Für Quasiprimärfeld mit den konformen Dimensionen

$h_+ = \frac{d+s}{2}$ und $h_- = \frac{d-s}{2}$ ($h, \bar{h}$ im euklid. Fall)

- Diese Struktur ergibt sich auch für 2dim. Spinorfelder:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}, \quad S(\varphi) = e^{\varphi/2\, \gamma^0\gamma^1}, \quad \gamma^5 := \gamma^0\gamma^1, \ (\gamma^5)^2 = 1$$

$\mathbb{1}, \gamma^0, \gamma^1, \gamma^0\gamma^1 \Rightarrow \exists$ Realisierung als 2×2 Matrizen

Dann: „Weyl-Spinor" $\frac{1\pm\gamma^5}{2}\psi$ mischen nicht!

$$S(\varphi)\frac{1\pm\gamma^5}{2}\psi = e^{\varphi/2\,\gamma^5}\frac{1\pm\gamma^5}{2}\psi = (\cosh\varphi/2 + \gamma^5\sinh\varphi/2)\frac{1\pm\gamma^5}{2}\psi$$

$$= \left(\frac{1\pm\gamma^5}{2}\cosh\varphi/2 \pm \frac{1\pm\gamma^5}{2}\sinh\varphi/2\right)\psi$$

$$= e^{\pm\varphi/2}\left(\frac{1\pm\gamma^5}{2}\psi\right)$$

d.h. (*) gilt dann auch für einzelne Weyl-Komp mit $s = 1/2$

Mit (*) $\Rightarrow$

$$\langle \varphi_1(x_1') \cdots \varphi_n(x_n')\rangle = \prod_{j=1}^n \left(\frac{dx_j'^+}{dx_j^+}\right)^{-h_{j+}} \left(\frac{dx_j'^-}{dx_j^-}\right)^{-h_{j-}} \langle \varphi_1(x_1)\cdots\varphi_n(x_n)\rangle$$

$\Rightarrow$ Für 2 Pkt:

$$\langle \varphi_1(x_1)\,\varphi_2(x_2)\rangle = \frac{C_{12}}{(x_1^+ - x_2^+)^{2h_+}(x_1^- - x_2^-)^{2h_-}}$$

$\rightarrow$ RS. 63

Für $h_{1+} = h_{2+} =: h_+$, $h_{1-} = h_{2-} =: h_-$, sonst Null!

$$\begin{aligned} d_1+s_1 &= d_2+s_2 \\ d_1-s_1 &= d_2-s_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad d_1=d_2\,,\; s_1=s_2$$

<u>Einschränkung an zugelassene Spinwerte s ?</u>

Geben in euklidischer Version:

$$\langle \varphi(z_1,\bar z_1)\varphi(z_2,\bar z_2)\rangle = \frac{C_{12}}{(z_1-z_2)^{2h_+}(\bar z_1-\bar z_2)^{2h_-}}$$

$$= \frac{C_{12}}{|z_1-z_2|^{2d}}\left(\frac{\bar z_1-\bar z_2}{z_1-z_2}\right)^s$$

$z_1-z_2=re^{i\varphi}$

$$= \frac{C_{12}}{r^{2d}}\, e^{-2i\varphi s}$$

$\Rightarrow$ eindeutig in $\mathbb{R}^2$ nur für $\boxed{2s = \text{integer}}$

<u>Beachte</u>: Ansonsten aus QM erstmal keine Einschränkung an Spin, da Drehgruppe in $\mathbb{R}^2$ abelsch ist.

Zulassung allgemeiner Werte für s $\rightarrow$ Parafermionen

<u>Konforme Wardidentitäten à la (3.2)</u>, S. 48/49 (und die für Drehg. + Transl.)
geben, spezialisiert auf $N=2$, bzw. Differentiation von (*) auf S. 64

$$\langle \varphi_1(x_1')\cdots\varphi_n(x_n')\rangle = \prod_{j=1}^n \left(\partial_+ x_j'^{+}\right)^{-\frac{d_j+s_j}{2}}\left(\partial_- x_j'^{-}\right)^{-\frac{d_j-s_j}{2}}\langle\varphi_1(x_1)\cdots\varphi_n(x_n)\rangle$$

$x_-'=x_-\,,\; x_+'=\rho x_+$ („chirale Dilatation" à la S. 60)

$$\langle\varphi_1(\rho x_{1+},x_{1-})\cdots\varphi_n(\rho x_{n+},x_{n-})\rangle = \rho^{-\sum_j h_j}\langle\varphi_1(x_1)\cdots\varphi_n(x_n)\rangle$$

$$\sum_{j=1}^n x_{j+}\frac{\partial}{\partial x_{j+}}\langle\;\rangle = -\sum_j h_j\langle\;\rangle$$

$$\boxed{\sum_{j=1}^n\left(x_{j+}\frac{\partial}{\partial x_{j+}}+h_{j+}\right)\langle\varphi_1(x_1)\cdots\varphi_n(x_n)\rangle=0}$$

Minkowski

Analog für $x_{j+}\to x_{j-}$, $h_{j+}\to h_{j-}$

Speziell konform (chiral)

$$x^+ \to \frac{x^+}{1+cx^+}, \quad \frac{dx'^+}{dx^+} = \frac{1}{(1+cx^+)^2}$$

$$\left\langle \varphi_1\left(\frac{x_1^+}{1+cx_1^+}, x_1^-\right) \cdots \varphi\left(\frac{x_n^+}{1+cx_n^+}, x_n^-\right)\right\rangle = \prod_{j=1}^{n} (1+cx_j^+)^{2h_{j+}} \langle \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n)\rangle$$

$$\left.\frac{d \frac{x^+}{1+cx^+}}{dc}\right|_{c=0} = -\frac{x^+}{(1+cx^+)^2} x^+ \Big|_{c=0} = -(x^+)^2$$

$$\left.\frac{d(1+cx_j^+)^{2h_{j+}}}{dc}\right|_{c=0} = 2h_{j+} x_j^+$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} (x_j^+)^2 \frac{\partial}{\partial x_j^+} \langle \;\rangle = \sum 2h_{j+} x_j^+ \langle \;\rangle$$

$$\boxed{\left(\sum_{j=1}^{n} (x_j^+)^2 \frac{\partial}{\partial x_j^+} + 2h_{j+} x_j^+\right) \langle \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n)\rangle = 0}$$

Analog für $x_j^+ \to x_j^-$
$h_{j+} \to h_{j-}$

Beide Identitäten für Euklidisch Fall analog, $x^\pm \to z^\pm$

4.2. Konforme Wardidentität und OPE mit Energie-Impulstensor, Zentrale Ladung

(Jetzt nur noch Euklidisch!)

Arbeite jetzt mit allg. 2dim CKV, $z \to z + \epsilon(z)$ $\epsilon(z)$ holomorph
$\bar{z} \to \bar{z} + \bar{\epsilon}(\bar{z})$ $\bar{\epsilon}$ antiholomorph

Konforme Primärfelder (Ohne Zusatz „Quasi" wenn volle ∞-dim 2dim Konf. Trafogruppe im Spiel)

$$\boxed{\delta\varphi = -h_+ \partial\epsilon\varphi - h_- \bar{\partial}\bar{\epsilon}\varphi - \epsilon\partial\varphi - \bar{\epsilon}\bar{\partial}\varphi}$$

infinitesimal

OK mit Francesco

Vgl RS 65

Halten allg. (3.2)

$$\int d^2x \, \langle \partial_\mu j^\mu \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n) \rangle = \delta \langle \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n) \rangle$$

$$= \langle \delta\varphi_1(x_1) \varphi_2(x_2) \cdots \varphi_n(x_n) \rangle + \cdots$$

(kein $-i$, da euklidisch)

$$+ \langle \varphi_1(x_1) \cdots \delta\varphi_n(x_n) \rangle$$

$$j^\mu = T^\mu{}_\nu \epsilon^\nu$$

$$\Rightarrow \delta \langle \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n) \rangle = \int d^2x \, \partial_\mu \langle T^{\mu\nu}(x) \epsilon_\nu(x) \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n) \rangle$$

$$= \lim_{M \to \text{"}\mathbb{R}^2\text{"}} \int_M d^2x \, \partial_\mu \langle T^{\mu\nu}(x) \epsilon_\nu(x) \cdots \rangle$$

$\boxed{\text{C umschließt alle Pkt. } x_j}$

$$= \oint_C dx^\alpha \epsilon_{\mu\alpha} \langle T^{\mu\nu} \epsilon_\nu(x) \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n) \rangle$$

Nun $\epsilon_{\mu\alpha} dx^\alpha T^{\mu\nu} \epsilon_\nu = dx^2 T^{1\nu} \epsilon_\nu - dx^1 T^{2\nu} \epsilon_\nu$

$$= dx^2 T^{11} \epsilon_1 + dx^2 T^{12} \epsilon_2 - dx^1 T^{21} \epsilon_1 - dx^1 T^{22} \epsilon_2$$

$x^1 = \frac{1}{2}(z+\bar z)$

$x^2 = \frac{1}{2i}(z-\bar z)$

$$= i T_{--} \bar\epsilon \, d\bar z - i T_{++} \epsilon \, dz - i T_{+-} (\epsilon \, dz - \bar\epsilon \, d\bar z)$$

RS (66)

T_{+-} gibt nur Kontaktterme, C weit weg von den $x_1, \ldots, x_n$

$\Rightarrow$ Kein Beitrag

$$\Rightarrow \quad \delta \langle \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n) \rangle = i \oint_C d\bar z \, \bar\epsilon(\bar z) \langle T_{--}(\bar z) \varphi_1(z_1, \bar z_1) \cdots \varphi_n(z_n, \bar z_n) \rangle$$

$$- i \oint_C dz \, \epsilon(z) \langle T_{++}(z) \varphi_1(z_1, \bar z_1) \cdots \varphi_n(z_n, \bar z_n) \rangle$$

Nun Standard (2d CFT) umdefinieren

$$\boxed{T_{++} = -\frac{T}{2\pi}, \quad T_{--} = -\frac{\bar T}{2\pi}}$$

Ok mit Francesco

$\Rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned}&\delta_\epsilon \langle \varphi_1(z_1,\bar z_1)\cdots\varphi_n(z_n,\bar z_n)\rangle\\ &\quad= -\frac{1}{2\pi i}\oint dz\, \epsilon(z)\langle T(z)\varphi_1(z_1,\bar z_1)\cdots\varphi_n(z_n,\bar z_n)\rangle\\ &\quad+\frac{1}{2\pi i}\oint d\bar z\,\bar\epsilon(\bar z)\langle \bar T(\bar z)\varphi_1(z_1,\bar z_1)\cdots\varphi_n(z_n,\bar z_n)\rangle\end{aligned}}$$

wissen $\delta_\epsilon \varphi_j(z_j,\bar z_j) = -h_{+j}\,\partial\epsilon(z_j)\,\varphi_j - h_{-j}\,\bar\partial\bar\epsilon(\bar z_j)\,\varphi_j$
$\qquad - \epsilon(z_j)\,\partial\varphi_j - \bar\epsilon\,\bar\partial\varphi_j$

- Integrand rechte Seite holomorph/antiholomorph bis auf Kontaktstellen
- Formel gilt für bel. $\epsilon(z)$, $\bar\epsilon(\bar z)$

$\Rightarrow$ nichtverschwindende linke Seite kann nur via Residuensätze durch Pole bei z_j entstehen

$$\Rightarrow\quad \boxed{T(z)\,\varphi_j(z_j,\bar z_j) = \frac{1}{z-z_j}\,\partial\varphi_j(z_j,\bar z_j) + \frac{h_{+j}}{(z-z_j)^2}\,\varphi_j(z_j,\bar z_j) + \text{regulär}}$$

& analog für $\bar T$, mit $z\to\bar z$, $\partial\to\bar\partial$, $h_{+j}\to h_{-j}$

Als Operatorrelation !!!

Anwendung auf T selbst, i.e. T·T

Klassisch: T hat konforme Dimension 2 *)

Dimension erfährt keine Quantenkorrektur

(z.B. wegen Def. über $\frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}}$ & Schwinger action principle)

$$\overset{?}{\Longrightarrow} \quad T(z)\,T(w) = \frac{2}{(z-w)^2}\,T(w) + \frac{1}{z-w}\,\partial T(w) + \underline{\text{regular}}$$

$\langle T\rangle = \langle \partial T\rangle = 0 \qquad \Longrightarrow \langle T(z)T(w)\rangle =$ regulär bei $z=w$

andererseits (2 Pktfunktion von Primärfeld.)

$$\langle T(z)T(w)\rangle = \frac{c/2}{(z-w)^4}$$

Schließen daraus:

$$\boxed{T(z)\,T(w) = \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^2}\,T(w) + \frac{1}{z-w}\,\partial T(w) + \text{regulär}}$$

$c \neq 0$ bedeutet $T(z)$ ist nur fast ein konformes (und chirales!) Primärfeld mit Gewicht 2

c heißt zentrale Erweiterung der Operatoralgebra von $T(z)$

oder auch <u>zentrale Ladung</u>

---

*) $T_{\mu\nu}$ hat Dimension 2 und Spin 2

T_{++} dann: $d=2,\ s=2 \Rightarrow h_+ = \frac{2+2}{2} = 2,\ h_- = \frac{2-2}{2} = 0$

T_{--} $\qquad d=2,\ s=-2 \Rightarrow h_- = \frac{2-2}{2} = 0,\ h_- = \frac{2+2}{2} = 2$

Beispiel freies masseloses skalares Feld

$$S = \tfrac{1}{2} \int d^2x \, \partial_\mu \varphi \, \partial^\mu \varphi$$

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \varphi \, \partial_\nu \varphi - \tfrac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \varphi \, \partial^\alpha \varphi$$

i.e. $T_{++} = \partial \varphi \, \partial \varphi \quad \Rightarrow \quad T = -2\pi \, \partial\varphi \, \partial\varphi$

$T_{--} = \bar\partial \varphi \, \bar\partial \varphi$

$$\langle \varphi(z,\bar z) \, \varphi(w,\bar w) \rangle = -\frac{1}{4\pi} \log\big((z-w)(\bar z - \bar w)\big)$$

check: $\partial_\mu \partial^\mu = 4 \, \partial \bar\partial$.

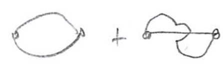
$$4 \partial \bar\partial \left(-\frac{1}{4\pi} \log\big((z-w)(\bar z - \bar w)\big)\right) = -\frac{1}{2\pi} \left(\bar\partial \frac{1}{z-w} + \partial \frac{1}{\bar z - \bar w} \right)$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} -\frac{1}{2\pi} \left(\bar\partial \frac{\bar z - \bar w}{|z-w|^2 + \epsilon^2} + \partial \frac{z-w}{|z-w|^2+\epsilon^2} \right)$$

$$= -\frac{1}{\pi} \frac{\epsilon^2}{(|z-w|^2 + \epsilon^2)^2} = -\delta^{(2)}(z-w)$$

$$\Rightarrow \langle T(z) \, T(w) \rangle = 4\pi^2 \langle T_{++}(z) \, T_{++}(w) \rangle$$

Kombinationen



$$= \frac{4\pi^2}{16\pi^2} \left(\partial_z \partial_w \log |z-w|^2 \right)^2 \cdot 2$$

$$= \frac{1}{2} \left(\partial_z \frac{1}{w-z} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(z-w)^2} \right)^2$$

$\Rightarrow \boxed{c = 1}$

- n freie skalare Felder $\Rightarrow c = n$
- Analog freies Spin $1/2$ Majoranafeld $\Rightarrow c = 1/2$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{\exists \text{ Korrespondenz von zentraler Ladung und \# feldtheoret. Freiheitsgraden}}$

Zentrale Ladung und Spuranomalie

Auftreten des Terms zur zentralen Ladung in T·T läßt sich als Konsequenz der Spuranomalie beim Einbetten in allg. krumme Mf verstehen

Vgl. 2.3. $T^{\mu}{}_{\mu} = \frac{c}{48\pi} R$ i.e. Brechung durch Krümmung der 2dim Raumzeit

Das führt zu Zusatztermen in „krummer" Verallgemeinerung von S. 68 oben. Siehe Eguchi, Ooguri NPB 282 (1987) 308

Term verschwindet im flachen Limes, aber:

Differenziert man vor flachem Limes nach der Metrik, um zusätzliche Einsetzung für T zu erhalten, bleibt im flachen Grenzfall genau der vorher in T·T diskutierte c-Term übrig!

Verhalten von T(z) bei endlichen konformen Trafos

Wissen von S. 68 oben und T-T OPE

$$\delta_\epsilon T(z) = -\frac{c}{12}\partial^3\epsilon(z) - 2\partial_z\epsilon\, T(z) - \epsilon(z)\partial_z T(z)$$

Ohne c-Term würde das bedeuten

$$U(k)\, T(w)\, U^{-1}(k) = \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2 T(z)$$

$$w = k(z)$$

Mache Ansatz $U(k)\,T(w)\,U^{-1}(k) = \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2 \Big(T(z) - \Delta(w,z)\Big)$

Gruppeneigenschaft für $z \to w \to v$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta(v,z) = \Delta(w,z) + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \Delta(v,w)}$$

Diese Relation & inf. Info $\Rightarrow$

$$\Delta(w,z) = \frac{c}{12} S(w,z)$$

mit $S(w,z) = \frac{w'''}{w'} - \frac{3}{2}\left(\frac{w''}{w'}\right)^2$ Schwarz'sche Ableitung

Bemerkung:

Schwarz'sche Ableitung verschwindet für Möbiustrafo $SL(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$

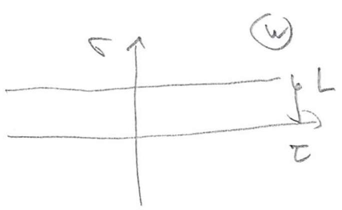
i.e. $T(z)$ transformiert wie Quasiprimärfeld

aber nicht wie Primärfeld.

Physikalische Effekte der zentralen Ladung

Betrachte endliches System mit periodischen Randbed.

$w = \tau + i\sigma$ $\qquad \varphi(\sigma + L) = \varphi(\sigma)$



Kann konform auf ganze Ebene (z) abgebildet werden:

$$z = e^{\frac{2\pi w}{L}}, \quad w = \frac{L}{2\pi} \log z$$

Index s für strip
p für plane

$$U(k)\,T(w)\,U^{-1}(k) = \left(\frac{dz}{dw}\right)^2\left(T(z) - \frac{c}{12} S(w,z)\right) = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2\left(z^2 T(z) - \frac{c}{24}\right)$$

hier $\quad w' = \frac{L}{2\pi}\frac{1}{z}\,, \quad w'' = -\frac{L}{2\pi}\frac{1}{z^2}\,, \quad w''' = \frac{L}{\pi}\frac{1}{z^3}$

$$\Rightarrow S(w,z) = 2\,\frac{1}{z^2} - \tfrac{3}{2}\left(\frac{1}{z}\right)^2 = \tfrac{1}{2}\,\frac{1}{z^2}$$

$|0\rangle_p = U(k)\,|0\rangle_s\,;$

$${}_s\langle 0|\,T(w)\,|0\rangle_s = {}_s\langle 0|\,U^{-1}U\,T(w)\,U^{-1}U\,|0\rangle_s$$

$$= {}_p\langle 0|\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2\left(z^2 T(z) - \frac{c}{24}\right)|0\rangle_p$$

Wenn nun wegen Normalordnung in Ebene $\langle 0|T|0\rangle = 0$

$$\Rightarrow \boxed{{}_s\langle 0|T|0\rangle_s = -\frac{c\pi^2}{6L^2}}$$

Energie des Grundzustandes $E_0 = \int_0^L d\sigma \langle T_{00}\rangle = \langle \int_0^L (T_{++} + T_{--})\, d\sigma\rangle$

$$= -\frac{1}{2\pi}\langle \int_0^L (T + \bar{T})\, d\sigma\rangle$$

$$= -\frac{L}{2\pi}\left(-\frac{c\pi^2}{6L^2} - \frac{c\pi^2}{6L^2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{E_0 = \frac{\pi c}{6L}}$$

D.h. Zentrale Ladung verursacht Casimireffekt,
c also messbare Größe !!

Weitere Manifestation in Gleichgewichtsthermodyn. 2dim Systeme, dort über $L \Leftrightarrow 1/\text{Temp.}$ Aussagen zur Temperaturabh. der freien Energie möglich.

Sehen insgesamt: c parametrisiert (milde) Brechung der konformen Invarianz, sowohl bei Anwesenheit einer Längenskala in Randbedingungen oder bei Anwesenheit von Krümmung der Raumzeit

Zur Illustration von QFT-Standardtechniken diskutieren wir noch:

Berechnung der zentralen Ladung für freies skalares Feld über Spuranomalie

$$S[\varphi, g] = \tfrac{1}{2} \int d^2x \sqrt{g}\, \partial_\mu \varphi\, \partial^\mu \varphi$$

$$Z[g] = \int \mathcal{D}\varphi\, e^{-S[\varphi, g]} = \int \mathcal{D}\varphi\, e^{-\frac{1}{2}\int d^2x \sqrt{g}\, \varphi \Delta \varphi}$$

mit $\Delta = -\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu \sqrt{g}\, g^{\mu\nu} \partial_\nu$ (pos. definit!)

$\mathcal{D}\varphi = ?$ $\qquad \varphi = \sum_n a_n \varphi_n, \quad \Delta \varphi_n = \lambda_n \varphi_n, \quad \int d^2x \sqrt{g}\, \varphi_n \varphi_m = \delta_{nm}$

$$\mathcal{D}\varphi := \prod_n da_n$$

$$\Rightarrow Z[g] = \int \prod_n da_n\, e^{-\frac{1}{2}\sum_\ell \lambda_\ell a_\ell^2} = \prod_n \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda_n}}$$

d.h. $\quad Z[g] = (\det \Delta)^{-1/2} = e^{-\frac{1}{2} \operatorname{tr} \log \Delta}$

$\swarrow$ siehe RS 74

$$\log Z = 1/2 \ \mathrm{tr} \int_\epsilon^\infty e^{-t\Delta} \frac{dt}{t}$$

<u>heat kernel Regularisation</u>

<u>3.6.10</u>

$$= \frac{1}{2} \sum_n \int_\epsilon^\infty \int d^2x \sqrt{g}\, \varphi_n(x)\, e^{-t\Delta} \varphi_n(x) \frac{dt}{t} = 1/2 \int_\epsilon \sum_n e^{-t\lambda_n} \frac{dt}{t}$$

Nun $\sum_n \varphi_n(x)\varphi_n(x') = \frac{\delta(x-x')}{\sqrt{g}}$

$$\Rightarrow \log Z = 1/2 \int d^2x \lim_{x'\to x} \int_\epsilon^\infty e^{-t\Delta} \delta(x-x') \frac{dt}{t}$$

$$= 1/2 \int d^2x \lim_{x'\to x} \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2k\, e^{-ikx'} e^{-t\Delta_x} e^{ikx} \frac{dt}{t}$$

Einfacher als direkte Berechnung von $\log Z$ ist die Berechnung der Variation bei $\delta g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}\,\delta\sigma$:

$$\delta\sqrt{g} = \sqrt{g}\,\delta\sigma, \quad \delta g^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\beta}\delta\sigma \quad \Rightarrow \quad \delta\Delta = +\frac{1}{\sqrt{g}}\delta\sigma\, \partial_\mu \sqrt{g}\, g^{\mu\nu}\partial_\nu$$

$$\delta \frac{1}{\sqrt{g}} = -\frac{1}{(\sqrt{g})^2}\sqrt{g}\,\delta\sigma \qquad \cancel{-\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\mu \sqrt{g}\,\delta\sigma\, g^{\mu\nu}\partial_\nu}$$

$$+\cancel{\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\mu\sqrt{g}}\, g^{\mu\nu}\delta\sigma\,\partial_\nu$$

$$\delta\Delta = -\delta\sigma\,\Delta$$

$$\Rightarrow \delta\, \mathrm{tr}(e^{-t\Delta}) = \mathrm{tr}\left(e^{-t\Delta}(-t)(-\delta\sigma\Delta)\right)$$

$$\Rightarrow \delta\left(\mathrm{tr}\int_\epsilon^\infty e^{-t\Delta}\frac{dt}{t}\right) = \mathrm{tr}\left(\delta\sigma\,\Delta \int_\epsilon^\infty e^{-t\Delta}dt\right) = \mathrm{tr}\left(\delta\sigma\,\Delta\frac{1}{\Delta}e^{-\epsilon\Delta}\right)$$

$$= \mathrm{tr}\left(\delta\sigma\, e^{-\epsilon\Delta}\right)$$

d.h. $\delta \log Z = 1/2 \int d^2x \lim_{x'\to x} \delta\sigma(x)\, e^{-\epsilon\Delta_x}\delta(x-x')$

$$= \frac{1}{8\pi^2}\int d^2x \int d^2k\, e^{-ikx}\,\delta\sigma(x)\, e^{-\epsilon\Delta_x} e^{ikx}$$

Nun ist $\partial e^{ikx} = e^{ikx}(\partial + ik) \Rightarrow f(\partial) e^{ikx} = e^{ikx} f(\partial + ik)$

$$\Rightarrow \delta \log Z = \frac{1}{8\pi^2} \int d^2x \int d^2k \, \delta\sigma(x) \circ e^{+\epsilon \frac{1}{\sqrt{g}}(\partial_\mu + ik_\mu)\sqrt{g}\, g^{\mu\nu}(\partial_\nu + ik_\nu)} \cdot \mathbb{1}$$

Diff. operatoren wirken am Ende auf $\mathbb{1}$

mit lokal konformer Eichg $g_{\alpha\beta} = \rho \delta_{\alpha\beta}$; i.e. $\boxed{\delta\sigma = \delta \log \rho}$

$$\delta \log Z = \frac{1}{8\pi^2} \int d^2x \int d^2k \, \delta\sigma \, e^{+\epsilon \frac{1}{\rho}(\partial^2 + 2ik\partial - k^2)} \mathbb{1}$$

$$\underset{k = \frac{q}{\epsilon^{1/2}}}{=} \frac{1}{8\pi^2 \epsilon} \int d^2x \int d^2q \, \delta\sigma \, e^{-\frac{q^2}{\rho} + \frac{2i\epsilon^{1/2}}{\rho} q\partial + \frac{\epsilon}{\rho}\partial^2} \mathbb{1}$$

$$e^{A+B} = e^A e^{B - 1/2[A,B] + 1/6[A,[A,B]] - \frac{1}{12}[B,[B,A]] + \dots}$$ siehe RS 75

Nutzen das mit $A = -\frac{q^2}{\rho}$

$B = \frac{2i\epsilon^{1/2}}{\rho} q\partial + \frac{\epsilon}{\rho}\partial^2$

$$\Rightarrow \delta \log Z = \frac{1}{8\pi^2\epsilon} \int d^2x \int d^2q \, \delta\sigma \, e^{-\frac{q^2}{\rho}} \underbrace{e^{\frac{2i\epsilon^{1/2}}{\rho} q\partial + \frac{\epsilon}{\rho}\partial^2 + \text{Kommutatorterme (enthalten } \epsilon!)}}_{\text{entwickeln, } \partial \mathbb{1} = 0} \cdot \mathbb{1}$$

$\int d^2k \, e^{-k^2} = \pi$, $\int d^2k \, e^{-k^2} k_\mu = 0$, $\int d^2k \, e^{-k^2} k_\mu k_\nu = \frac{\pi}{2}\delta_{\mu\nu}$ etc

$\Longrightarrow$ (nach trivial but tedious Rechnung)

$$\delta \log Z = \frac{1}{8\pi\epsilon} \int d^2x \sqrt{g(x)} \, \delta\sigma(x) + \frac{1}{48\pi} \int d^2x \, \partial^2 \log\rho \, \delta\sigma(x) + o(1)$$

$$\boxed{\delta \log Z = \frac{1}{8\pi\epsilon} \int d^2x \sqrt{g(x)} \, \delta\sigma(x) + \frac{1}{48\pi} \int d^2x \sqrt{g} \, R \, \delta\sigma(x) + o(1)}$$

4.3. Virasoroalgebra und Zustandsraum

Wählen für euklidische Theorie sogenannte

Radiale Quantisierung $\hat{=}$ Korrelationsfunktionen werden verstanden als bezüglich $r = |z|$ geordnete Vakuumerwartungswerte von Feldern

$$\boxed{R\left(\varphi_1(z,\bar z)\varphi_2(w,\bar w)\right) = \begin{cases}\varphi_1\,\varphi_2, & |z|>|w| \\ \varphi_2\,\varphi_1, & |z|<|w|\end{cases}}$$

Bemerkung:

- Dies ist insbesondere für euklidische Beschreibung der Theorien auf Minkowski-Zylinder $\underset{\text{Zeit}}{\underset{\uparrow}{\mathbb{R}}} \times \underset{\text{Raum}}{\underset{\uparrow}{S^1}}$, wie er für geschlossene Strings relevant ist, geeignet.

$$\underbrace{\mathbb{R}\times S^1\Big|_{\text{Mink. Metrik}} \xrightarrow{\text{Wick}} \mathbb{R}\times S^1\Big|_{\text{Euklid. Metrik}}}$$

Koordinaten σ, τ; $\varphi(\sigma+2\pi) = \varphi(\sigma)$, $\tau \in \mathbb{R}$

$$\boxed{z := e^{w}\,; \quad w = \tau + i\sigma} \quad (*)$$

Dann ∞-Vergangenheit $\tau \to -\infty$ $\hat{=}$ $z = 0$

∞-Zukunft $\tau \to +\infty$ $\hat{=}$ $z = \infty$

Untermf. $\tau = \text{const}$ $\hat{=}$ Kreise in z-Ebene mit $|z| = \text{const}$.

Beachte: Nur Abbildung des euklid. Zylinders auf Ebene $\to$ R.S. 70 ist konform (offensichtlich, da $(*)$ holomorph)

d.h. erst Wick, dann Abbildung Zylinder $\to$ Ebene

Betrachte Operatoren A, B, die durch Integration holomorpher Operatoren $a(z), b(z)$ entstehen

$$A = \oint a(z)\,dz, \qquad B = \oint b(z)\,dz$$

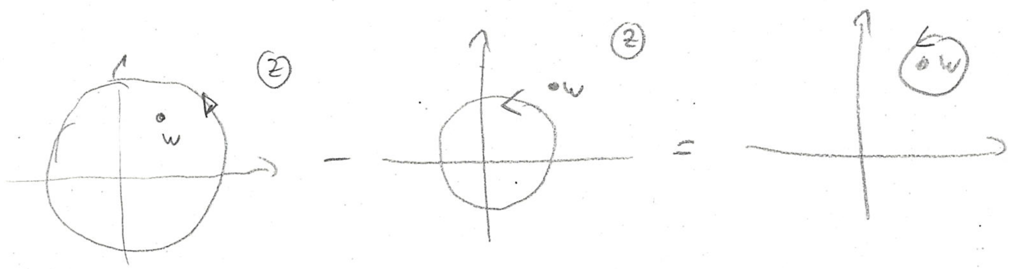
mit Integrationsweg, der Ursprung umläuft

Integration entlang Kreis
≙ Integration über „Raum"

A & B Erhaltungsgrößen → Bemerkung KS. 77

$$[A, B] = \oint_{|z|>|w|} dz \oint dw\; a(z)\, b(w) - \oint_{|z|<|w|} dz \oint dw\; b(w)\, a(z)$$

$$= \left(\oint_{|z|>w} dz \oint dw - \oint_{|z|<|w|} dz \oint dw \right) \left(R(a(z)\, b(w)) \right)$$



$$\Rightarrow \boxed{[A, B] = \oint_0 dw \oint_w dz\; R(a(z)\, b(w))}$$

← Francesco (6.17)

≙ einfach Fouriertransformation in Minkowski Koord $e^{i\tau_{\text{Mink}} + i\sigma}$ τ_{Eukl}

<u>Anwendung auf $T(z)$</u> (Zulassung von Sing. bei $z=0$ und $z=\infty$)

$$T(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{-n-2} L_n \quad \Rightarrow \quad L_n = \frac{1}{2\pi i} \oint dz\, z^{n+1}\, T(z)$$

$$\bar{T}(\bar{z}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{z}^{-n-2} \bar{L}_n \qquad \bar{L}_n = \frac{1}{2\pi i} \oint d\bar{z}\, \bar{z}^{n+1}\, \bar{T}(\bar{z})$$

$\Rightarrow$

$$[L_m, L_n] = -\frac{1}{4\pi^2} \oint_0 dw\, w^{n+1} \oint_w dz\, z^{m+1}\, R(T(z)T(w))$$

<u>Bem:</u> Bislang OPE $T \cdot T$ war zur Einsetzung in Korrelationsfkt. gemeint, betrifft also R-geordnete Größe

i.e. $$R(T(z)\,T(w)) = \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^2}\, T(w) + \frac{1}{z-w}\partial T(w) + \text{regul.}$$

$$\Rightarrow [L_m, L_n] = -\frac{1}{4\pi^2} \oint_0 dw\, w^{n+1} \underbrace{\oint_w dz\, z^{m+1}\left(\frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^2} T(w) + \frac{1}{z-w}\partial T(w)\right)}_{2\pi i\left(\frac{c}{2\cdot 3!}(m+1)m(m-1)\, w^{m-2} + 2(m+1)\, w^m\, T(w) + w^{m+1}\partial T(w)\right)}$$

$$\oint_w \frac{f(z)}{(z-w)^k} = 2\pi i \frac{1}{(k-1)!} f^{(k-1)}(w)$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{c}{12} m(m^2-1) \oint_0 dw\, w^{n+m-1} + 2(m+1) \oint_0 dw\, w^{n+m+1}\, T(w) \right.$$

$$\left. + \oint_0 dw\, \underbrace{w^{n+m+2}\partial T(w)}_{= \partial(\;) - (n+m+2)\, w^{n+m+1}\, T(w)}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{c}{12} m(m^2-1)\, 2\pi i\, \delta_{n+m,0} + 2\pi i\, 2(m+1)\, L_{n+m} \right.$$

$$\left. - 2\pi i\,(n+m+2)\, L_{n+m}\right)$$

d.h. $$\boxed{[L_m, L_n] = (m-n)\, L_{m+n} + \frac{c}{12} m(m^2-1)\, \delta_{n+m,0}}$$

d.i. Virasoro-Algebra

analog für $\overline{L}_n$

& $[L_m, \overline{L}_n] = 0$

Vergleich mit Witt-Algebra der Generatoren der konf. Trafo

$$l_n = -z^{n+1}\partial$$

$$[l_m, l_n] = z^{m+1}\partial z^{n+1}\partial - z^{n+1}\partial z^{m+1}\partial$$

$$= (n+1)z^{m+1+n}\partial + \cancel{z^{m+n+2}\partial\partial} - (m+1)z^{n+1+m}\partial - \cancel{z^{m+n+2}\partial\partial}$$

$$= -(m-n)z^{m+n+1}\partial = (m-n)\,l_{m+n}$$

$$\boxed{[l_m, l_n] = (m-n)\,l_{m+n}}$$

d.h. Virasoroalgebra entsteht aus Wittalgebra durch Hinzunahme einer zentralen Erweiterung

Virasoroalgebra hat $sl(2,\mathbb{C})$ Unteralgebra, generiert von L_0, L_1, L_{-1}:

$$[L_0, L_1] = -L_1$$
$$[L_0, L_{-1}] = L_{-1}$$
$$[L_1, L_{-1}] = 2L_0$$

<u>Kommutatoren der L_n mit Primärfeldern</u>

$$[L_n, \varphi(w,\bar{w})] = \frac{1}{2\pi i}\oint_0 dz\, z^{n+1}[T(z), \varphi(w,\bar{w})]$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left(\oint_{|z|>|w|} dz\, z^{n+1}\, T(z)\varphi(w,\bar{w}) - \oint_{|z|<|w|} dz\, z^{n+1}\varphi(w,\bar{w})T(z)\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_w dz\, z^{n+1}\, R(T(z)\varphi(w,\bar{w}))$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_w dz\, z^{n+1}\left(\frac{1}{z-w}\partial\varphi(w,\bar{w}) + \frac{h_+}{(z-w)^2}\varphi(w,\bar{w}) + \text{regul.}\right)$$

$\uparrow$

S. 68

$$= w^{n+1}\partial\varphi + (n+1)h_+ w^n \varphi$$

i.e. $$\boxed{[L_n, \varphi(w,\bar w)] = (n+1)h_+ w^n \varphi(w,\bar w) + w^{n+1}\partial\varphi}$$

Charakterisierung der ~~von~~ einem Primärfeld abgeleitete Felder, konforme Familien

- Von Primärfeldern abgeleitete Felder heißen auch Sekundärfelder
- Abgeleitet für englisch „descendant"

$$T(z)\,\phi(w,\bar w) = \sum_{k=0}^{\infty} (z-w)^{-2+k}\,\phi^{(k)}(w,\bar w)$$

kennen schon $\phi^{(0)} = h_+\phi$

$\phi^{(1)} = \partial\phi$

10.6.10

Dann ist offenbar

$$\phi^{(k)}(w,\bar w) = \frac{1}{2\pi i}\oint_w dz\,(z-w)^{-k+1}\,T(z)\,\phi(w,\bar w)$$

$$=: L_{-k}(w)\,\phi(w,\bar w)$$

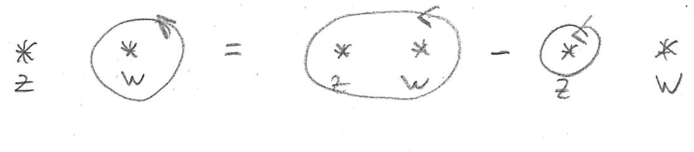
d.i. Def. von $L_{-k}(w)$

Bisher $L_{-k} = L_{-k}(0)$

Generieren weitere abgeleitete Felder aus OPE von $\phi^{(k)}$ mit T

usw. usf. $$\phi^{(k_1,k_2,\dots)}(w,\bar w) := L_{-k_1}L_{-k_2}\cdots\phi(w,\bar w)\,, \quad k_j \geq 0$$

$$T(z)\,\phi^{(k)}(w,\bar w) = T(z)\,\frac{1}{2\pi i}\oint_w du\,(u-w)^{-k+1}\,T(u)\,\phi(w,\bar w)$$



unter Radialordnung!

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{w,z} du\,(u-w)^{-k+1}\, T(z) T(u) \phi(w,\bar w) - \frac{1}{2\pi i} \oint_{z} du\,(u-w)^{-k+1}\, \underbrace{T(z)T(u)}_{\frac{c/2}{(u-z)^4} + \frac{1}{u-z}\partial T(z) + \frac{2}{(u-z)^2}T(z) + \dots} \phi(w,\bar w)$$

$$T(u)\phi(w,\bar w) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (z-w)^{-2+\ell} \phi^{(\ell)}$$

.... rechnen $\to$ R.S. 8

$\Rightarrow$ Koeffizient bei $(z-w)^{-2}$ ist $(h_+ + k)\,\phi^{(k)}(w,\bar w)$

analog für höhere Ableitungen $\Rightarrow$

$$\boxed{\text{konforme Dimension von } \phi^{(k_1, k_2 \dots)}(w,\bar w) \text{ ist } h_+ + k_1 + k_2 + \dots}$$

Operator-state correspondence

Sei $\varphi(z,\bar z)$ primary field mit konformer Dimension h

$$\boxed{|h, \{k\}\rangle := \lim_{z\to 0} \varphi^{\{k\}}(z,\bar z)|0\rangle}$$

$\leftarrow$ Bem. Eigentlich $|h, \bar h, \{k\}, \{\bar k\}\rangle$!

Spezifikation des Vakuums!

Wollen möglichst viel Symmetrie implementieren.

Ist $L_n|0\rangle = 0$, $\forall n$ möglich?

Antwort Nein: Virasoro $[L_m, L_n] = (m-n) L_{m+n} + \frac{c}{12} \dots$

$$\Rightarrow \quad 0 = 0 + \frac{c}{12} m(m^2-1)\,\delta_{n+m,0}$$

konsistente Wahl: $\boxed{\begin{aligned} L_n |0\rangle &= 0 \\ \bar{L}_n |0\rangle &= 0 \end{aligned} \quad , \; \forall \; n \geq -1}$

(*) $\underline{m \geq -1,\ n \geq -1}$ $\Rightarrow m+n \geq -2$

-1 0 1 2

c-Term aktiv nur für $m=-n$

$\hookrightarrow n \geq 2$ hieße das $m \leq -2$, d.i. nicht in *)

$-1 \leq n \leq 1$ Faktor $m(m^2-1) =$ Null

Eigenschaften von $|h\rangle = \lim\limits_{z\to 0} \varphi(z,\bar z)|0\rangle$:

$$L_0 |h\rangle = \lim_{z\to 0} L_0 \varphi(z,\bar z)|0\rangle = \lim_{z\to 0} [L_0, \varphi]|0\rangle$$

$$\underset{\uparrow}{=} h \lim_{z\to 0} \varphi(z,\bar z)|0\rangle \Rightarrow \boxed{L_0|h\rangle = h\,|h\rangle}$$

s. 81 oben

$$L_n|h\rangle = \lim_{z\to 0} L_n \varphi(z,\bar z)|0\rangle \underset{n\geq -1}{=} \lim_{z\to 0} [L_n, \varphi(z,\bar z)]|0\rangle$$

$$= \lim_{z\to 0} \left((n+1) h z^n \varphi + z^{n+1}\partial\varphi\right)|0\rangle$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{L_n|h\rangle = 0 \quad , \; n \geq 1}$$

Hatten $|h, \{k\}\rangle = \lim\limits_{z\to 0} \varphi^{\{k\}}(z,\bar z)|0\rangle$

Man kann nun zeigen, daß auch direkt

$$|h, \{k\}\rangle = L_{-k_1} L_{-k_2} \cdots |h\rangle \; ; \; k_j > 0$$

dann folgt weiter und direkt über Virasoro $[L_0, L_{-k}] = k L_{-k}$

$$L_0 (L_{-k} |h\rangle) = L_{-k} (L_0 + k) |h\rangle = (h+k) L_{-k} |h\rangle$$

i.e. $\boxed{L_0 |h, \{k\}\rangle = (h + k_1 + k_2 + \ldots) |h, \{k\}\rangle}$

Von $|h\rangle$ und allen davon abgeleitet Zuständen $|h, \{k\}\rangle$

aufgespannter Raum heißt Verma-Modul

Jedes Verma-Modul definiert eine Darstellung der

Virasoroalgebra.

Zu $h + k_1 + k_2 + \ldots$ heißt $N = k_1 + k_2 + \ldots$ level des abgeleiteten Zustands „descendant"

Bezüglich des Wertes der konformen Dimension sind die

L_{-k}, $k > 0$ Aufsteigeoperatoren und

L_k, $k > 0$ Absteigoperatoren

$|h\rangle$ ist innerhalb eines Vermamoduls der Zustand niedrigster Dim.
(„highest weight state")

Bemerkung:

Man kann auch den Vermamodul zu $|0\rangle$ behandeln,

da $T(z) = \sum z^{-n-2} L_n$

$$\Rightarrow \lim_{z \to 0} T(z) |0\rangle = L_{-2} |0\rangle$$

$$L_n |0\rangle = 0, \quad n \geq -1$$

d.h. $T(z)$ entspricht über Operator-state correspondence

ein abgeleiteter Zustand

Man findet auch direkt auf Operatorniveau:

$$L_{-2}(w)\,\mathbb{1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_w dz\,\frac{1}{(z-w)}\,T(z) = T(w).$$

i.e. T ist kein Primärfeld (das wussten wir schon)

T ist level 2 - abgeleitetes Feld in der von $\mathbb{1}$ erzeugten konformen Familie!!

Zustandsraum einer 2d-CFT

Sei $V(c,h)$ Verma-Modul zur zentralen Ladung c und dem konformen Gewicht h dann gilt allgemein

$$\boxed{\mathcal{H} = \bigoplus_{h,\bar h} \underbrace{N_{h,\bar h}}_{\text{Zahl (Vielfachheit)}} \cdot V(c,h)\otimes V(c,\bar h)}$$

- Summe kann endlich oder unendlich sein
- Summe kann auch kontinuierlich, i.e. Integral sein

Rationale CFT: Nur endliche Summe

<u>oder</u> Summe unendlich, aber ∃ erweiterte Symmetrie algebra sodaß bezüglich der Erweiterungsmodule nur endlich viele übrig bleiben.

Realisierung des Skalarproduktes, adjungierte Operatoren

Vgl. Ginsparg

Minkowski: reelle Felder $\hat{=}$ selbstadj. Op $A = A^+$

Zeitentwicklung:

$$A(x,t) = e^{iHt} A(x,0) e^{-iHt}$$
$$\underbrace{A^+(x,t)}_{A(x,t)} = e^{iHt} \underbrace{A^+(x,0)}_{A^+(x,0)} e^{-iHt}$$

selbstkonsistent

Euklid: 1. Versuch: reelle Felder $\hat{=}$ selbstadj. Op.

„Zeitentwicklung":

$$A(x,\tau) = e^{H\tau} A(x,0) e^{-H\tau}$$
$$A^+(x,\tau) = e^{-H\tau} A^+(x,0) e^{H\tau}$$
$$A = A^+ \rightarrow A(x,\tau) = e^{-H\tau} A(x,0) e^{H\tau}$$

Widerspruch

Deshalb

reelle Felder $\hat{=}$ $\boxed{\left(A(z,\bar{z})\right)^+ := A\left(\frac{1}{\bar{z}}, \frac{1}{z}\right) \frac{1}{(-\bar{z}^2)^h} \frac{1}{(-z^2)^{\bar{h}}}}$

Da $z = e^{\tau + i\sigma}$ entspricht $\boxed{\tau \rightarrow -\tau : \quad z \rightarrow \frac{1}{\bar{z}}}$

Konsequenz für $T(z)$

$$T(z) = \sum L_n z^{-n-2} \Rightarrow T^+(z) = \sum_n L_n^+ \bar{z}^{-n-2}$$

andererseits Reality-Forderung

$$T^+(z) \stackrel{!}{=} T\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) \frac{1}{(-\bar{z}^2)^2} = \sum_n L_n \left(\frac{1}{\bar{z}}\right)^{-n-2} \cdot \frac{1}{\bar{z}^4}$$
$$= \sum_n L_n \bar{z}^{n-2}$$

$\Rightarrow L_{-n} = L_n^+$

d.h. $\boxed{L_{-n} = L_n^+}$ analog $\bar{L}_{-n} = \bar{L}_n^+$

Hatten für Primärfeld φ mit Dimension h

$$|h\rangle = \lim_{\substack{z\to 0\\ \bar z\to 0}} \varphi(z,\bar z)|0\rangle .$$

Da $z=0$ $\tau\to-\infty$ entspricht, ist das ein „in-Zustand".

Wie sieht analoge Konstruktion für $\tau\to+\infty$ $\hat{=}$ „out-Zustand" aus?

Um limes wohldefiniert zu machen: Mit $w=\frac{1}{z}$ Trafo in Karte wo $z\to\infty$ $w\to 0$ entspricht

Haben (S. 64) $\underbrace{U\varphi(w,\bar w)U^{-1}}_{\tilde\varphi(w,\bar w)} = \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^h \left(\frac{\partial \bar z}{\partial \bar w}\right)^{\bar h} \varphi(z,\bar z)$

Dann

$$\boxed{{}_{out}\langle h| = \lim_{w,\bar w\to 0} \langle 0|\tilde\varphi(w,\bar w) = \lim_{z,\bar z\to\infty} \langle 0|\varphi(z,\bar z)(-z^2)^h(-\bar z^2)^{\bar h}}$$

d.h. auch

$$ {}_{out}\langle h| = \lim_{w,\bar w\to 0} \langle 0| \underbrace{\varphi\left(\frac{1}{w},\frac{1}{\bar w}\right)(-w^2)^{-h}(-\bar w^2)^{-\bar h}}_{(\varphi(\bar w,w))^\dagger}$$

$$= \left(\lim_{w,\bar w\to 0} \varphi(\bar w,w)|0\rangle\right)^\dagger = \left(|h\rangle_{in}\right)^\dagger$$